Zum Begründen und Beweisen

„Das müssen wir erst beweisen!“ – Warum eigentlich? Ist das – aus Sicht der Schülerinnen und Schüler – ein unverständliches Ritual, das „die Mathematiker“ nun einmal immer durchführen?

Welche *Funktion* hat eigentlich ein Beweis in der Mathematik bzw. im Mathematikunterricht? Da ist zum einen die *wahrheitssichernde Funktion*: Man ist sich einer Tatsache nicht ganz sicher oder eine Tatsache wird von anderen Leuten bestritten: Mit einem Beweis ist man auf der sicheren Seite! Für den Mathematikunterricht spielt diese wahrheitssichernde Funktion eines Beweises allerdings nur dann eine Rolle, wenn man sich etwa fragt, ob die Winkelsumme im Dreieck tatsächlich genau 180° beträgt. Andererseits wird keine Schülerin und kein Schüler die Richtigkeit etwa des Satzes von Pythagoras anzweifeln; schließlich gehört er seit zweieinhalb Jahrtausenden zum Kulturerbe der Menschheit, und wenn er falsch wäre, dann hätte es wohl längst jemand gemerkt.

Nun haben Beweise auch die Funktion, neue Beziehungen zwischen dem zu Beweisenden und dem schon Bekannten herzustellen und so ein neues Licht auf das zu Beweisende zu werfen (sonst würde man nicht altbekannte Sätze immer wieder neu beweisen wollen). Diese *einsichtsfördernde* und *vernetzende Funktion* von Beweisen ist im Mathematikunterricht ganz wesentlich.

Die leitende Frage im Unterricht zu Pythagoras ist somit: Wie lässt sich die Aussage mit anderen Aussagen verknüpfen oder vernetzen?

Beispiel: Pythagoras I

Eine Beweis- oder Verknüpfungsbedürftigkeit ist nur gegeben, wenn der Sachverhalt (für die Schülerinnen und Schüler) überraschend ist und nicht auf die Schnelle geklärt werden kann.

Beispiel: Thales Beispiel: Mittelsenkrechten

Man wird ein „In-Beziehung-setzen“ zwischen verschiedenen Fakten und damit Teile einer deduktiven Schlusskette ansteuern.

Beweisen erwächst aus Argumentationen („Hätten wir uns das nicht gleich denken können?“), mitunter auch aus Verallgemeinerungen. Dabei verschaffen nicht die kürzesten Wege am meisten Einsicht; viel wichtiger ist die Dichte des Beziehungsgeflechts. Dabei ist es mitunter sinnvoll, Sachverhalte von mehreren Seiten zu betrachten.

Beispiel: Pythagoras II

Erfahrungsgemäß vertrauen nicht alle Schüler mehrschrittigen logischen Schlussfolgerungen. Dass man einer logischen Schlussfolgerung nicht über den Weg traut, ging auch bedeutenden Mathematikern schon so. Daher sollte, wann immer es möglich ist, die Anschaulichkeit beim Beweisen im Mathematikunterricht eine große Rolle spielen und zumindest die Argumentation unterstützen.

Auf diese Weise wird eine Einsicht in die Notwendigkeit allgemeingültiger Begründungen von Vermutungen allmählich aufgebaut.