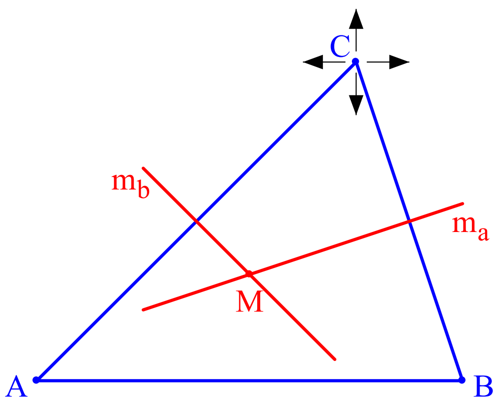
Zum Begründen und Beweisen

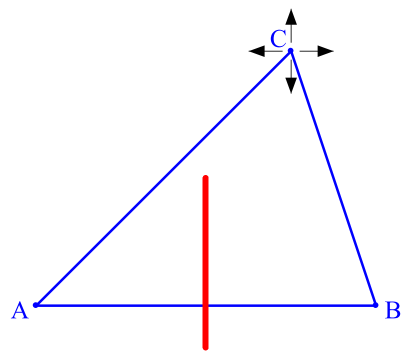
Beispiel: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkt

Dass die drei Mittelsenkrechten durch einen Punkt gehen, ist für Schülerinnen und Schüler häufig nicht überraschend. Einen Überraschungseffekt und daher einen Anlass zum Reden und zum Argumentieren bekommt man etwa mit folgender Vorgehensweise:

Man konstruiere ein Dreieck ABC und *zwei* Mittelsenkrechten, etwa m_a und m_b. Dass diese beiden Mittelsenkrechten sich schneiden, muss nicht problematisiert werden. Der Schnittpunkt sei M.

Nun kommt das Entscheidende: Man bewegt C mit der Maus und beobachtet, wie sich der Punkt M verhält. Dies Verhalten ist in der Tat überraschend: Obwohl C zweidimensional bewegt wird, bewegt sich M nur eindimensional! Wie kann man sich so etwas erklären?





Nun ist man im Zentrum des klassischen Beweises:

Was wissen wir über M? M liegt auf m_b, also hat M denselben Abstand zu A und zu C.

M liegt auch auf m_a, also hat M denselben Abstand zu B und zu C.

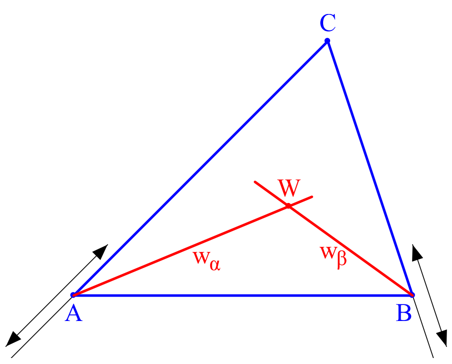
Dann hat M auch denselben Abstand zu A und zu B.

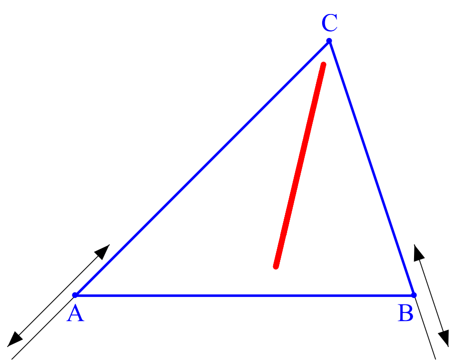
Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m_c.

Anders formuliert: Also geht auch m_c durch M.

Eine Übertragung dieser Vorgehensweise auf (Innen-)*Winkelhalbierende* ist ebenfalls möglich:

Bei den Mittelsenkrechten war c konstant; bei den Winkelhalbierenden muss entsprechend der Winkel γ konstant sein. Man beginne also mit zwei von C ausgehenden Halbgeraden, die den Winkel γ einschließen und wähle A und B jeweils auf einer der Halbgeraden. Die beiden so konstruierbaren Winkelhalbierenden w_α und w_γ schneiden sich in W. Bewegt man A und B auf den Halbgeraden, so bewegt sich W auf einer Geraden.





Nun kann man analog zu den Mittelsenkrechten argumentieren; es muss nur „Abstand von Punkt zu Punkt“ durch „Abstand von Punkt zu Gerade“ ersetzt werden.