

## 8 Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Näherungsverfahren

### 8.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „3.3.8 Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Näherungsverfahren“

Zur Inhaltsberechnung von „gekrümmten“ Figuren und Körpern benötigt man Näherungsverfahren. Diese sollen exemplarisch erarbeitet werden, um für spezielle Flächen und Körper geschlossene Formeln zu entwickeln. Dabei werden Grundvorstellungen vom Grenzwert ausgebaut. Bei weiteren Berechnungen soll der sachgerechte Umgang mit einer Formelsammlung geschult werden.

Die Formeln zur Berechnung von Kreisfläche und Kreisumfang werden durch ein geeignetes Näherungsverfahren zur Bestimmung von  $\pi$  gewonnen. Für mindestens einen Körper wird die Formel zur Volumenberechnung durch eine Treppenkörperannäherung hergeleitet.

Formeln für Teilfiguren und Teilkörper sollen darüber hinaus exemplarisch entwickelt werden. Für weitere Inhalts- und Volumenberechnungen genügt der Rückgriff auf eine Formelsammlung. Die auftretenden Formeln enthalten in der Regel Terme mit mehreren Variablen; variantenreiche Anwendungen sollen den Umgang mit solchen Termen festigen.

Bei unregelmäßigen Figuren oder Körpern muss man sich in der Praxis mit Abschätzungen begnügen. Dies soll an geeigneten Beispielen geübt werden.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
Bestimmung von $\pi$ Herleitung der Formeln für Flächeninhalt und Umfang eines Kreises entwickeln mindestens einer Volumenformel Berechnungen an Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel Berechnung von einfachen Teilfiguren und Teilkörpern Abschätzung der Maßzahlen unregelmäßiger Körper Darstellung von Körpern	VERNETZUNG Approximation, Grenzwert, Iteration Ähnlichkeit (3.3.3) Monte-Carlo-Methode Längen, Flächeninhalte, ... (3.2.6) Von der Konstruierbarkeit ... (3.3.5) Bogenmaß (3.3.9) Dichte, Auftrieb  DIDAKTIK/METHODIK Instabilität bei numerischen Verfahren Funktionen mehrerer Veränderlicher, z. B. $V(r, h)$ Festigung der Termkompetenz  ERWEITERUNG Prinzip von Cavalieri Kreisquadratur Mönchchen des Hippokrates u. ä. Historisches zu $\pi$

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Hannover 2003, Seite 34)

## 8.2 Unterrichtseinheit „Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Näherungsverfahren“

Eine Unterrichtseinheit, die den Kern des o.g. Bausteins vollständig behandelt, Möglichkeiten zu den Erweiterungen anbietet und grafikfähige Taschenrechner (GTR), Tabellenkalkulation (TK) oder Taschencomputer (TC) verwendet, wird vorgestellt.

Zunächst werden Näherungsverfahren am Beispiel der Ermittlung der Zahl  $\pi$  durchgeführt und anschließend auf die Volumenberechnung mithilfe von Treppenkörpern übertragen. Hierbei sollen Grundvorstellungen vom Grenzwertbegriff auf- und ausgebaut werden. Es folgt die Berechnung von einfachen Teilfiguren und Teilkörpern. En passant wird eine Formelsammlung erstellt und dabei der sachgerechte Umgang mit Termen geübt und gefestigt.

Interessante Aufgabenstellungen werden in Form von Arbeitblättern aufbereitet, die sowohl in Schülerhände gegeben werden können als auch als Vorlage für eine Lernwerkstatt geeignet sind. Lösungshinweise, die sich auf die Nutzung unterschiedlicher Hilfsmittel beziehen, werden in den Ergänzungen gegeben. Im Sinne eines Minimalkonzeptes stützt sich die Unterrichtseinheit auf den Einsatz eines GTR. Vertiefungen und Erweiterungen mit einem CAS und der Einsatz einer Tabellenkalkulation werden angesprochen und dargestellt.

<b>besondere Materialien/Technologie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• GTR, CAS, Tabellenkalkulation</li> </ul>	<b>Dauer der Unterrichtseinheit:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 16 Unterrichtsstunden</li> </ul>
--	---

### Gliederung

8.2.1	<i>Bestimmung der Kreiszahl <math>\pi</math></i>	261
8.2.2	<i>Exemplarische Herleitung der Volumenformel für den Kegel</i>	267
8.2.3	<i>Berechnungen an Flächen und Körpern</i>	269
8.2.4	<i>Anlagen: Ergänzungen und Lösungshinweise zu den Arbeitsblättern</i>	283
8.2.5	<i>Literatur</i>	297
8.2.6	<i>Kontakt</i>	297

## 8.2.1 Bestimmung der Kreiszahl

Zahlreiche Probleme führen auf den Flächeninhalt eines Kreises. Beispiele dafür sind: Flächenvergleiche, Querschnittsprobleme, Kugelstoßanlage, Verkehrsschilder, die je nach Interessenschwerpunkt ausgewählt werden können.

Im Rahmen eines realen Modells beschränkt man sich zunächst auf den Einheitskreis, dessen Flächeninhalt, eben  $\pi$ , zu bestimmen ist. Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius  $r$  wird danach über Ähnlichkeit bestimmt. Ein erster, leicht nachvollziehbarer Einstieg ist die In- und Umbeschreibung durch Quadrate mit dem Ergebnis  $2 < \pi < 4$ . Im weiteren Verlauf sollte nach Möglichkeit ein numerisches Verfahren und ein weiteres Verfahren behandelt werden. Hier werden die Eckenverdopplung und das Rechtecksummenverfahren unter Einsatz des TI-83 und der TI-92-Familie vorgestellt. Als optionaler Zusatz bieten sich weitere Verfahren wie Kästchenzählen, Gitterpunkte, Auswiegen und Monte-Carlo-Verfahren, das hier exemplarisch dargestellt wird, an.

### 1. Stunde

Die Motivation zur Flächenberechnung wird entsprechend der Lerngruppe gewählt. In dieser ersten Stunde sollte eine grobe Abschätzung des Flächeninhaltes des Einheitskreises mithilfe von zwei Quadraten erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler sollten eine erste Strategie zur Verbesserung des Verfahrens entwickeln. Als Näherungsverfahren bietet sich auch das Rechteckverfahren an, das dann in der folgenden Stunde erarbeitet wird. Vorher wird geklärt, dass der Flächeninhalt eines beliebigen Kreises mithilfe der Ähnlichkeit hergeleitet werden kann.

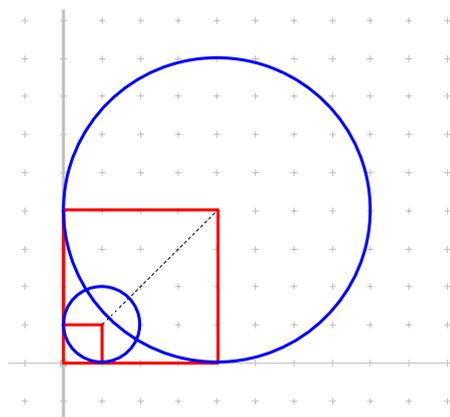
### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Berechnung des Kreisflächeninhaltes wird der Umfangsberechnung aus zwei Gründen vorgezogen:

- $\pi$  ergibt sich direkt als Flächeninhalt des Einheitskreises
- der Einstieg über das Rechteckverfahren ist einfacher als das Eckenverdopplungsverfahren.

Der Kreisflächeninhalt für Kreise mit beliebigen Radien kann über Ähnlichkeitsbetrachtungen hergeleitet werden (siehe *kreisstreckung.geo*).

Vernetzung: Baustein 3.3.3 (Ähnlichkeit)



## 2. Stunde

Mithilfe eines Arbeitsblattes berechnen die Schülerinnen und Schüler den Flächeninhalt des Einheitskreises durch Bestimmung der Obersumme und der Untersumme bei einer Unterteilung in 5 Teilintervalle. In einer zweiten Phase werden die Erkenntnisse von fünf auf  $m$  Streifen übertragen und die Berechnung beispielhaft für verschiedene  $m$  vom Taschenrechner durchgeführt. Das angegebene Programm in den Ergänzungen (Anlage 4) ermöglicht die grafische Darstellung der Rechteckstreifen und kann zur Vertiefung und zur Veranschaulichung benutzt werden.

### Didaktisch-methodischer Kommentar

Bei der Berechnung der Rechteckhöhen müssen die Kenntnisse über den Satz des Pythagoras reorganisiert werden.

Mit dem Rechteckverfahren werden zum einen propädeutisch Grenzwertbetrachtungen initiiert und zum anderen eine ausbaufähige Grundlage zur Einführung des Integralbegriffs gelegt. [Das Programm in den Ergänzungen ist für beliebige Grenzen und für beliebige (streng monoton fallende) Funktionen geeignet.]

Vernetzung: Baustein 3.3.5 (Von der Konstruierbarkeit zur Berechenbarkeit)

## 3. - 5. Stunde

Nach Aufstellen einer Formel zur Berechnung der Kreisfläche anhand eines Näherungsverfahrens wird nun eine Formel zur Berechnung des Kreisumfangs mithilfe des bekannten „Tortenmodells“ plausibel gemacht.

An dieser Stelle sind drei Varianten denkbar.

### *Variante A*

Ein zweites Näherungsverfahren wird direkt für die Herleitung der Formel des Kegelvolumens mithilfe eines Treppenkörpers durchgeführt.

### Didaktisch-methodischer Kommentar

Diese Variante ist für schwächere Lerngruppen geeignet, oder sie ermöglicht andere Schwerpunktsetzungen.

Zur Festigung und Vertiefung der Näherungsverfahren bieten sich Varianten an, zwei davon werden näher dargestellt.

### *Variante B: Eckenverdopplung nach Archimedes*

In einem Arbeitsblatt werden verschiedene Iterationen zur Berechnung des Umfangs ein- und umbeschriebener Vielecke angegeben. Eine entsprechende Kurzanleitung (GTR und TC) für die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Umsetzung (Anlagen 5 + 8) und Lösungshinweise für die Lehrkraft (Anlagen 6 + 7) sind in den Ergänzungen zu finden.

Zur Veranschaulichung des Verfahrens und zur gleichzeitigen Erweiterung der Methodenkompetenz kann auch ein Excelarbeitsblatt dienen (Anlage 9).

### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die zum Verfahren dargestellten Arbeitsaufträge bieten die Möglichkeit zur Betrachtung von numerischen Instabilitäten.

Der Vergleich der unterschiedlichen Iterationsterme zeigt die Notwendigkeit eines vertieften Verständnisses von Termstrukturen. Die Sinnhaftigkeit von Termumformungen wird deutlich.

Vernetzung: Baustein 3.2.6 (Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und deren Terme)

### *Variante C: Monte-Carlo-Verfahren*

Über ein Arbeitsblatt wird den Schülerinnen und Schülern das Verfahren vorgestellt und sie werden angeleitet, es mithilfe der eingesetzten Technologie umzusetzen. Lösungshinweise hierzu sind in den Ergänzungen am Beispiel eines GTR (Anlagen 10 + 11) zu finden.

### Didaktisch-methodischer Kommentar

Der Reiz dieses Verfahrens liegt in der Vernetzung mit den entsprechenden Aspekten der Stochastik (u. a. Betrachtung von Häufigkeiten, empirisches Gesetz der großen Zahlen). Im Gegensatz zu den bisher dargestellten numerischen Verfahren erhält man keine Intervallschachtelung für  $\pi$ .

Vernetzung: Baustein 3.2.1 (Daten und Prognose)

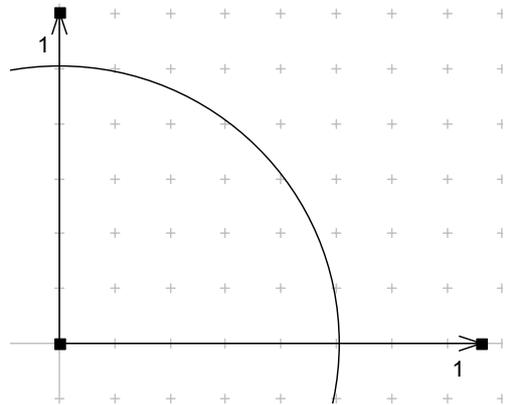
<b>Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Rechteckssummen</b>	<b>GTR/CAS</b>

**Aufgabe**

Nähere den Flächeninhalt des Viertelkreises mithilfe von Rechteckstreifen an. Wähle 5 Streifen. (Zerlege das Intervall  $[0;1]$  in 5 Teilintervalle.)

Fülle die Tabelle aus.

Entwickle eine Methode zur Berechnung der Höhe der Rechteckstreifen (Hinweis: Zeichne Radien ein und berechne die Höhen der entstandenen rechtwinkligen Dreiecke mithilfe des Satzes von Pythagoras).



<b>Untersumme <math>U_5</math></b>				
Stützstellen	Höhen der Rechteckstreifen	Flächeninhalt der Rechteckstreifen	Summe aller Flächeninhalte	Flächeninhalt des Kreises

<b>Obersumme <math>O_5</math></b>				
Stützstellen	Höhen der Rechteckstreifen	Flächeninhalt der Rechteckstreifen	Summe aller Flächeninhalte	Flächeninhalt des Kreises

Vermutlicher Flächeninhalt des Einheitskreises: \_\_\_\_\_

<b>Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Archimedes (Eckenverdopplung)</b>	<b>GTR</b>

Auch Archimedes versuchte  $\pi$  mithilfe des Einheitskreises zu bestimmen. Hierzu ging er von regelmäßigen einbeschriebenen Vielecken aus und bestimmte die Umfänge dieser Vielecke, um sich so dem Kreisumfang zu nähern. Bei fortlaufender Verdopplung der Eckenanzahl und der Hinzunahme umschriebener Vielecke ergibt sich so eine Intervallschachtelung für  $\pi$ . Die Seitenlänge eines einbeschriebenen Vielecks wird mit  $s$  bezeichnet. Für beliebige regelmäßige Vielecke gilt dann: Bei der Verdopplung der Eckenanzahl von  $n$  auf  $2n$  verringert sich die Seitenlänge von  $s_n$  auf  $s_{2n}$  mit

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

1. Begründe die Gleichung. Nutze hierzu dein Schulbuch, ggf. die Schulbibliothek. Überprüfe auch das Internet auf weitergehende Informationen, z. B. zu Archimedes.
2. Nutze die Kurzanleitung für deinen Rechner und versuche Näherungswerte für  $\pi$  zu bestimmen (Anlage 5).
3. Für die Seitenlänge  $S$  eines umschriebenen Vielecks ergibt sich analog die folgende Gleichung:

$$S_{2n} = 4 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2} - 1}{S_n}$$

Ermittle analog zu 2) Näherungswerte mithilfe deines Rechners. Dokumentiere die Nutzung deines Rechners ausführlich und gib eine geeignete Intervallschachtelung für  $\pi$  an. Erkläre dabei evtl. auftretende Schwierigkeiten.

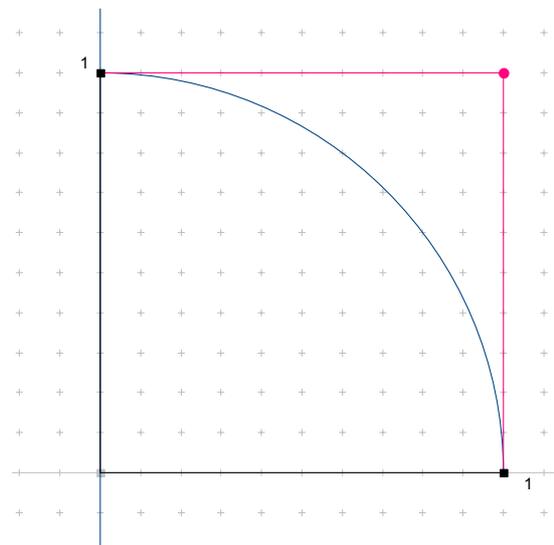
4. Für  $s_n$  und  $S_n$  wird nun mit folgenden Iterationen gearbeitet:

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} \quad \text{und} \quad S_{2n} = \frac{S_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + 1}}$$

se Iterationsvorschriften äquivalent zu den vorher gegebenen sind. Überprüfe diese Iterationen auf ihre Rechnertauglichkeit.

Bestimmung von $\pi$		
Stochastisches Näherungsverfahren	Monte Carlo	GTR

Auf dem Einheitskreis geht ein Zufallsregen nieder, wobei alle Punkte des Einheitsquadrates gleichberechtigt sind. Anschließend werden diejenigen Punkte gezählt, die im Inneren des Viertelkreises liegen, und mit der Gesamtanzahl der „Regentropfen“ verglichen.



- Überlege, wie sich hieraus ein Näherungsverfahren für  $\pi$  herleiten lässt.

- Programmiere deinen Taschenrechner so, dass ein Zufallsregen von 100 bzw.  $N$  Tropfen auf dem Einheitskreis erzeugt wird. Nutze hierzu die Funktion „rand“ und lege die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten in Listen ab.



$N = 250$



- Ergänze das Programm so, dass es jeden Punkt prüft, ob er im Inneren des Viertelkreises liegt. Lass alle so ermittelten Punkte zählen und den so ermittelten Näherungswert für  $\pi$  berechnen.
- Beurteile das Verfahren im Vergleich mit anderen dir bekannten Verfahren zur Ermittlung von  $\pi$ .

## 8.2.2 Exemplarische Herleitung der Volumenformel für den Kegel

### 6. Stunde

Mithilfe des Prismenvolumens sollen sich die Schülerinnen und Schüler die Gleichung für das Zylindervolumen über eine Analogiebetrachtung klarmachen.

Die Formel für das Volumen eines Zylinders kann durch die Einschachtelung von regelmäßigen, einseitigen Prismen hergeleitet werden. Gegebenenfalls kann ein Rückgriff auf das Eckenverdopplungsverfahren erfolgen. Das Näherungsverfahren für das Kegelvolumen verläuft in Analogie des Rechteckverfahren mit den Treppenkörpern (Zylinder). Die Radien der einzelnen Zylinder ergeben sich aus Ähnlichkeitsbetrachtungen oder Strahlensätzen. Die Teilvolumina werden mit einer Folge erzeugt, nicht einzeln ausgegeben, sondern direkt mit einem Summenbefehl aufaddiert (Anlage 12). Durch Vergleich eines konkreten Kegelvolumens mit dem Volumen des kleinsten umbeschriebenen Zylinders erhält man die Formel für das Zylindervolumen.

### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Herleitung des Kegelvolumens erfolgt in direkter Anknüpfung an entsprechende Überlegungen zum Kreis und Zylinder. Dieses Vorgehen greift das Rechteckverfahren und die Intervallschachtelung wieder auf. Damit müssen die Schülerinnen und Schüler bekannte Verfahren in einem neuen Zusammenhang selbstständig anwenden. Eine Übertragung auf die Berechnung des Pyramidenvolumens ist direkt möglich. In unserem Unterrichtsgang erfolgt die Herleitung der Formel durch ein Zerlegungsverfahren zu einem späteren Zeitpunkt.

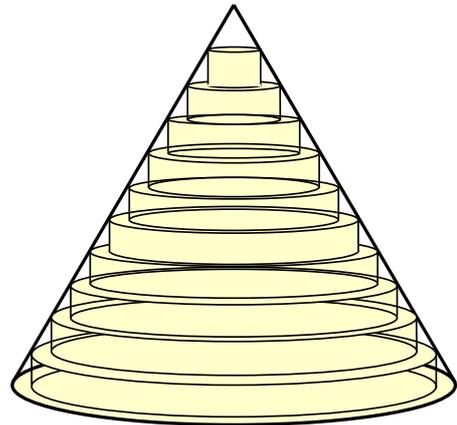
Die relativ hohe Anzahl vorgegebener Scheiben motiviert die Nutzung der vorhandenen Technologie. Die geforderten Termumformungen schulen die zugehörigen Kompetenzen.

Bestimmung des Kegelvolumens		
Numerisches Näherungsverfahren	Treppenkörper	GTR

Das Volumen eines Kegels soll ermittelt werden.

1. Analysiere hierzu das nebenstehende Bild und versuche ein geeignetes Näherungsverfahren zu beschreiben.

Verdeutliche dir im Hinblick auf die Formel zur Bestimmung des Zylindervolumens  $V_{Zyl} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$  den Zusammenhang zwischen Zylinder und Prisma, Kreis und Vieleck.



2. Stelle dir den Kegel zunächst aus 10 gleich dicken Scheiben zusammengesetzt vor und berechne den Radius und die Höhe jeder dieser Scheiben. Wähle hierzu als Höhe  $H$  des Kegels  $H = 11$  cm und  $R = 4$  cm und beschrifte das Bild des nebenstehenden Längsschnittes.

3. Erläutere die Formel zur Berechnung des Radius der „i-ten“ Scheibe:

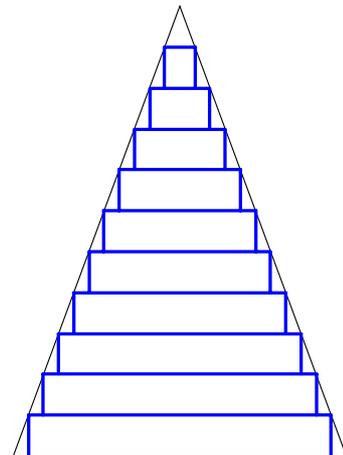
$$\frac{r_i}{R} = \frac{H - \frac{H}{11} \cdot i}{H} .$$

4. Bringe die Gleichung in die Form:  $r_i = R \cdot \left(1 - \frac{1}{11} i\right)$ .

5. Bestimme eine Formel zur Berechnung des Volumens der i-ten Scheibe und berechne dann das Gesamtvolumen des Treppenkörpers durch Summenbildung.

6. Verbessere deine Näherung, indem du nun von z. B. 500 Scheiben ausgehst.

7. Vergleiche dein ermitteltes Ergebnis mit dem Volumen des kleinsten Zylinders, der den Kegel enthält und mache einen Vorschlag für eine allgemeine Formel.



### 8.2.3 Berechnungen an Flächen und Körpern

Zeitaufwand: etwa 6 bis 7 Stunden

#### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Stunden sind mit Arbeitsblättern konzipiert, die ein Lernen an Stationen bzw. in Gruppen möglich machen. Es wurde darauf Wert gelegt, möglichst zu jedem Arbeitsblatt einen handlungsorientierten Arbeitsauftrag zu entwerfen. Aus den Aufgaben soll automatisch eine Formelsammlung entstehen. Die behandelten Themen sind als Minimalkatalog zu verstehen; die jeweils 2. Aufgabe auf den Arbeitsblättern kann als mögliche Zusatzaufgabe dienen.

#### 7. Stunde: Kreisteile

Die Mittelpunktswinkel sind so gewählt, dass der Kreisbogen und die Kreisfläche zunächst unmittelbar bestimmt werden können. Die Tabellen sind so angelegt, dass die Proportionalitäten  $A \sim \alpha$  und  $b \sim \alpha$  gut gesehen werden. Im unteren Teil der Tabellen können diese Proportionalitäten dann angewendet werden.

Aus dieser Aufgabe können anschließend die Formeln  $\frac{A}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360}$  und  $\frac{b}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360}$  für die Formelsammlung entwickelt werden.

Außerdem muss an dieser Stelle auf das Bogenmaß als gleichwertige Beschreibung für den Winkel, abgeleitet aus der Bogenlänge im Einheitskreis, hingewiesen werden:  $b = \frac{\alpha}{180}\pi$ .

Ergänzungsmaterial sollten die bekannten, aus Kreisteilen zusammengesetzten Figuren sein wie auch z. B. die Mönchen des Hippokrates.

Vernetzung: Baustein 3.3.9 (Kreisgleichungen und Kreisfunktionen)

Kreisteile		
Kreisausschnitt Kreisbogen Bogenmaß	Aufgabenblatt 1	GTR

### Aufgabe

Martin und Tina fahren Karussell, Martin auf dem Feuerwehrauto der Innenbahn und Tina auf dem Pferd auf der Außenbahn des Karussells. Nach der Fahrt streiten die beiden sich darum, wer schneller gefahren ist.



- Überlege dir Argumente für Tina, dass sie schneller gefahren ist als Martin.
- Überlege dir Argumente für Martin, dass er genauso schnell gefahren ist wie Tina.
- Vergleiche ebenso die Geschwindigkeit des Sekundenzeigers deiner Armbanduhr mit der Geschwindigkeit des Sekundenzeigers der Bahnhofsuhr.

### Aufgabe

a) Bestimme die Flächeninhalte  $A$  für die Kreisteile mit folgenden Mittelpunktswinkeln  $\alpha$  und Radien  $r$ :

$\alpha$	$r = 2$		$r = 5$		$r$ beliebig	
	$A$	$A/r^2$	$A$	$A/r^2$	$A$	$A/r^2$
360°						
180°						
90°						
60°						
45°						
1°						
10°						
120°						
200°						
$\alpha$ allgemein						

b) Bestimme entsprechend den Bogen  $b$  der Kreisteile:

$\alpha$	$r = 2$		$r = 5$		$r$ beliebig	
	$b$	$b/r$	$b$	$b/r$	$b$	$b/r$
$360^\circ$						
$180^\circ$						
$90^\circ$						
$60^\circ$						
$45^\circ$						
$1^\circ$						
$10^\circ$						
$120^\circ$						
$200^\circ$						
$\alpha$ allgemein						

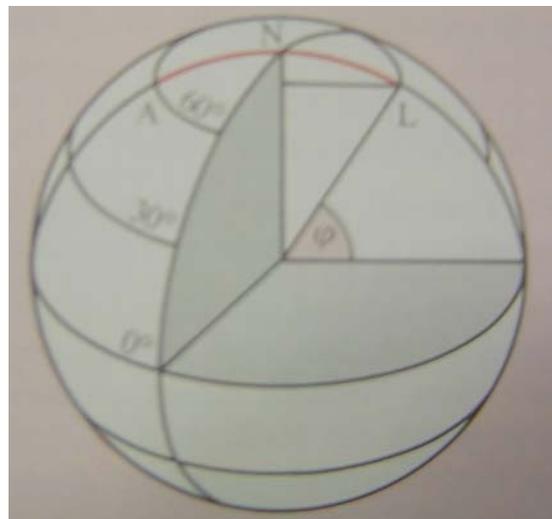
Markiere in der Tabelle die allgemeine Formel für die Fläche  $A$  des Kreisausschnitts und für den Kreisbogen  $b$ .

Information: Die Länge des Bogens im Einheitskreis bezeichnet man auch als Bogenmaß.

### Aufgabe

Der 60. Teil eines Winkels von  $1^\circ$  wird Bogenminute ( $1'$ ) genannt. Die zugehörige Bogenlänge auf der Erde heißt Seemeile (1 sm).

Wie groß ist 1 sm in km, wenn der Erdradius  $r_E = 6371$  km beträgt?



### 8. Stunde: Oberfläche/Mantel und Volumen eines Zylinders

In der Einführungsaufgabe werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, ein Modell einer Dose anzufertigen. Durch Betrachtung des Netzes ergibt sich die Formel der Mantelfläche des Zylinders  $M = 2\pi r h$ . Weitere Aufgaben betreffen sowohl die Oberfläche  $O = 2\pi r(r + h)$  als auch das Volumen des Zylinders  $V = \pi r^2 h$ , die der Formelsammlung zu entnehmen ist.

#### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Bierglasaufgabe mit ihren Termumformungen ist eine geeignete, um die Schülerinnen und Schüler mit der Solve-Funktion des CAS vertraut zu machen.

#### Erweiterungen: Skalierung eines Messzylinders

Vernetzung: Bausteine 3.2.6 (Längen, Inhalte und deren Terme) und 3.2.8 (Rationale Zahlen)

### 9. Stunde: Mantelfläche/Volumen eines Kegels

Auch hier wird ein enaktiver Einstieg vorgeschlagen. Aus einem kreisförmigen Papierbogen werden unterschiedliche Kegelmäntel geformt. Aus dem Vergleich der Flächen der Kreisausschnitte ergibt sich empirisch die Formel für die Manteloberfläche  $M = \pi r s$ .

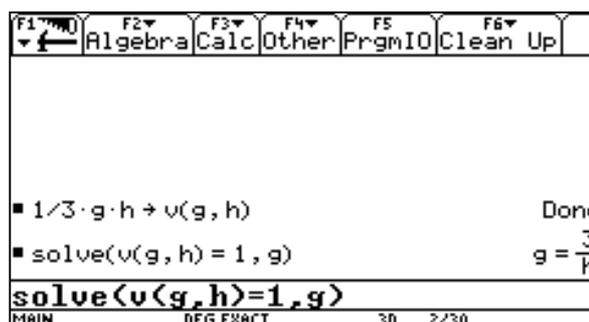
#### Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Formel für das Volumen des Kegels

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  ist der Formelsammlung zu entnehmen.

Sie ist im Unterricht hergeleitet worden.

Bei der 2. Aufgabe besteht bei Verwendung eines CAS-Rechners die Möglichkeit, eine Funktion mit zwei Veränderlichen einzuführen. Die Verwendung der Solve-Funktion kann hier wieder aufgegriffen werden.



Vernetzung: Baustein 3.2.6 (Längen, Inhalte und deren Terme)

<b>Zylinder</b>		
<b>Oberfläche, Mantel, Volumen</b>	<b>Aufgabenblatt 2</b>	<b>Papier, Schere, Maßstab, Dose, GTR</b>

### Arbeitsauftrag

- Baue aus einem DIN A4-Blatt ein Modell der Dose, die du hier siehst, im Maßstab 1:1.
- Wie viele Quadratzentimeter Papier benötigst du dafür mindestens?
- Begründe, dass man zur Bestimmung der Oberfläche eines solchen *Zylinders* auch die Formel  $O = 2\pi r (r + h)$  nehmen kann.



Für die weitere Fragestellung benötigst du auch die Formel für das Volumen des Zylinders.

### Aufgabe

- Bestimme die €-/Cent-Münze mit dem größten Volumen.
- Es ist im Verkehr mit den Banken üblich, die Münzen in Rollen zusammenzufassen und in Papier einzurollen. Wie groß müsste das Papier mindestens sein, um eine Rolle von fünfzig 50-Cent-Münzen gerade einzuwickeln?
- Für die 50-Cent-Münze gibt die Europäische Zentralbank (EZB) eine Dichte von  $8,3 \text{ g/cm}^3$  an. Wie schwer würde demnach die Geldrolle sein?

### Aufgabe

Das nahezu zylindrische Bierglas im Bild hat einen Außendurchmesser von 7,4 cm und eine Wandstärke von 3 mm. Der Boden ist 1,2 cm dick, und es ist 22 cm hoch. In welcher Entfernung von der Oberkante muss der Eichstrich für 0,5 l angebracht werden?



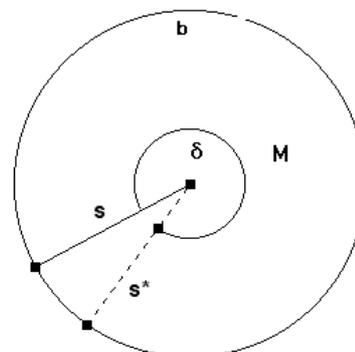
<b>Kegel</b>		
<b>Mantel, Volumen</b>	<b>Aufgabenblatt 3</b>	<b>Papier, Geodreieck, Schere, GTR, CAS</b>

**Arbeitsauftrag**

Schneidet euch einen Kreis mit nicht zu kleinem Radius  $s$  aus und schneidet den Kreis längs dieses Radius auf.

Wenn du die beiden freien Kreisenden übereinander schiebst, so dass  $s$  auf  $s^*$  liegt, so erhältst du einen Kegel mit einem neuen Radius  $r$  an der Grundfläche. Wähle für  $\delta$  die Maße aus der unten stehenden Tabelle und fülle die Tabelle aus.

Den sichtbaren Teil der Oberfläche nennt man Mantel  $M$  des Kegels;  $s$  ist nunmehr die Mantellinie dieses Kegels.



$\delta$	$r$	$r/s$	$b$	$M$
<b>330°</b>				
<b>300°</b>				
<b>270°</b>				
<b>240°</b>				
<b>210°</b>				
<b>180°</b>				

Begründe die folgenden Schritte zum Finden der Formel für den Flächeninhalt des Kegelmantels:

$$2\pi r = 2\pi s \cdot \frac{\delta}{360} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{s} = \frac{\delta}{360} \quad \Leftrightarrow \quad M = \pi \cdot r \cdot s$$

Formuliere die letzte Gleichung in Worten.

**Aufgabe**

Ein kegelförmiges Sektglas hat einen oberen inneren Durchmesser von 5 cm und fasst maximal 0,2 l. Wie hoch steht der Sekt im Glas, wenn es nur mit 0,1 l gefüllt wird?

**Aufgabe**

Ein Sortiment von Kegeln hat eines gemeinsam: Jeder Kegel hat das Volumen  $V = 1 \text{ dm}^3$ .

- Welche Grundfläche  $G$  und welche Höhe  $h$  haben 8 dieser Kegel?
- Bestimme in jedem dieser Fälle  $G$  in Abhängigkeit von  $h$  und verallgemeinere den Zusammenhang.
- Zeichne den Graphen der Zuordnung  $G \rightarrow h$ . Auf was für einer Kurve liegen die Kegelspitzen?

### 10. Stunde: Oberfläche und Volumen von Kugeln

Alternativ zu dem hier vorgeschlagenen Einstieg könnte die Lehrkraft auch Knetkugeln mit dem Radius 1 cm mitbringen. Da bei der Berechnung des Radius eine 3. Wurzel zu ziehen ist, muss gegebenenfalls ein entsprechender Hinweis an die Schülerinnen und Schüler gegeben werden. Die Formeln zur Berechnung von Oberfläche  $O = 4\pi r^2$  und Volumen einer Kugel  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  werden nicht hergeleitet, sondern werden einer Formelsammlung entnommen. Die Froschkönig-Aufgabe ist eine durchaus anspruchsvolle Aufgabe. Der Einsatz eines CAS ist hier empfehlenswert.

#### Didaktisch-methodischer Kommentar

Als Kontrolle - ob die Schülerinnen und Schüler bis hierhin den „roten Faden“ im Unterricht gefunden haben - empfiehlt sich zu Beginn dieser oder der nächsten Stunde ein Lernprotokoll. Es könnte folgende Fragen beinhalten:

[I] Was war unser Ausgangsproblem?

[II] Gib ein Beispiel für ein Problem, was du mit dem Neugelerten jetzt lösen kannst.

[III] Welche Fehler kannst du machen?

Ein Lernprotokoll erlaubt einen tiefen Einblick in den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler. Es sollte jedoch nicht bewertet werden (Lit. [2]).

Vernetzung: Baustein 3.2.6 (Längen, Inhalte und deren Terme), Dichte

### 11. Stunde: Volumen einer Pyramide

Die Herleitung der Formel  $V = \frac{1}{3}G \cdot h$  beschränkt sich auf eine Plausibilitätsbetrachtung. Ein Schwerpunkt der Aufgaben liegt im Zeichnen von Schrägbildern.

*Die Behandlung der Cavalieri-Aufgabe ist eine Erweiterung.*

Vernetzung: Baustein 3.2.3 (Winkel in Ebene und Raum)

Kugel		
Volumen, Oberfläche	Aufgabenblatt 4	Knete, GTR, CAS

### Arbeitsauftrag

- Forme aus dem vorhandenen Material 2 Knetkugeln gleichen Volumens und bestimme ihren Durchmesser.
- Um wie viel größer wird vermutlich der Durchmesser, wenn ich die beiden Kugel zu einer zusammenknete?
- Bestimme nun den Durchmesser durch eine Messung.
- Erkläre das Ergebnis.
- Um wie viel Prozent vergrößert sich die Oberfläche?

### Aufgabe

Kannst du eine Korkkugel mit dem Durchmesser von 1 m tragen ( $\rho_{\text{Kork}} = 0,27 \text{ g/cm}^3$ )?

### Aufgabe

Im Märchen „Der Froschkönig“ lässt die Prinzessin eine Kugel „aus purem Gold“, mit der sie vorher gespielt hat, in den Brunnen fallen, aus dem der Frosch die Kugel vom Grund wieder hervorholt.

- Schätze anhand des Bildes den Durchmesser der Kugel und bestimme ihre Masse (Dichte:  $19,3 \text{ g/cm}^3$ ).
- Welche Veränderungen müsste man an der Kugel „aus purem Gold“ vornehmen, damit die Prinzessin tatsächlich damit spielen könnte?



<b>Pyramide</b>		
<b>Satz von Cavalieri, Volumen</b>	<b>Aufgabenblatt 5</b>	<b>GTR, Kartenstapel, Bierfilze, Münzen</b>

### **Arbeitsauftrag**

Für Zylinder und Prisma kennst du die Formel  $V = G \cdot h$  für das Volumen. Für Pyramide und Kegel kann das so nicht stimmen, da sie sich nach oben verjüngen.

- a) Kannst du den richtigen Faktor schätzen?
- b) Im Folgenden erfährst du, wie du ihn berechnen kannst.

Zeichne ein Schrägbild eines Würfels mit der Kantenlänge  $a = 5 \text{ cm}$  mit allen Raumdiagonalen. Der Schnittpunkt der Raumdiagonalen stellt die Spitze von 6 kongruenten Pyramiden dar. Gib eine Formel für das Volumen einer einzelnen Pyramide in Abhängigkeit von ihrer Grundfläche und ihrer Höhe an.

### **Aufgabe**

Ein Oktaeder besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge  $a$ , die in Form zweier Pyramiden mit den quadratischen Grundflächen aneinander gesetzt sind.

- a) Zeichne ein Schrägbild des Oktaeders.
- b) Berechne das Volumen des Oktaeders für die Kantenlänge  $a = 1$ .

### **Aufgabe (Cavalieri)**

Besorge dir einen Kartenstapel, einen Stapel Bierfilze oder einen Stapel gleicher Münzen. Verschiebe den Stapel in sich oder drehe ihn spiralförmig.

- a) Vergleiche die entstehenden Volumina.
- b) Lässt sich dieses Erkenntnis auch auf die Pyramide übertragen?

### 12. Stunde: Oberfläche und Volumen zusammengesetzter Körper und Teilkörper

Mit Erarbeitung des Aufgabenblattes 5 haben die Schülerinnen und Schüler alle Körper kennen gelernt. Es schließt sich eine Stunde mit variantenreichem Üben an. Viele der zusammengesetzten Körper entsprechen unserer Alltagsumgebung. Die zweite Aufgabe (Abschätzen des Körpervolumens) ist sehr komplex und umfangreich. Die Abschätzungen können je nach Anforderung durch einfache oder komplizierte Körper durchgeführt werden.

#### Didaktisch methodischer Kommentar

Auch Zehntklässler freuen sich, wenn man Untersuchungen an Objekten vornimmt, die im Klassenraum vorhanden sind (mitgebrachte Körper von der Lehrkraft oder von Schülerinnen/Schülern; ggf. Vorbereitung durch eine Hausaufgabe: Betrachte deine Umgebung mit der „Mathebrille“).

### 13. Stunde: Klassenarbeit

Die vorgeschlagenen Aufgaben verstehen sich als Angebotsliste.

## Zusammengesetzte Körper

Volumen

Aufgabenblatt 6

GTR, CAS, Maßband

### Aufgabe 1 Kegelstumpf

Die Abbildung zeigt den unteren Stammteil einer Palmenart, der bis zum 5. Ring einen Kegelstumpf darstellt. Der Stamm hat am Fuß einen Durchmesser von etwa 70 cm. In Höhe des 5. Ringes ist der Durchmesser nur noch 30 cm. Die Höhe bis zum 5. Ring beträgt etwa 1,10 m.

Berechne das Volumen des Kegelstumpfes.



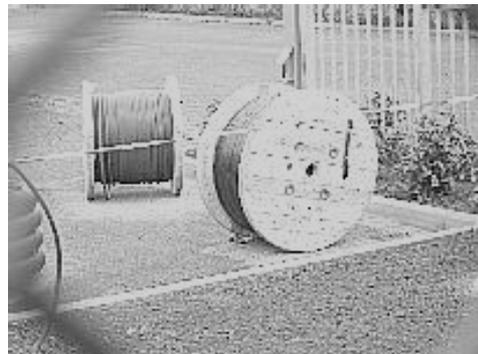
### Aufgabe 2 Partnerarbeit - Körpervolumen

Nimm an deinem Nachbarn Maß und versuche, das Volumen seines Körpers zu berechnen, indem du ihn in bekannte, geeignete Teilkörper zerlegst.

### Aufgabe 3 Kabelrolle

Eine 30 cm breite Kabelrolle hat leer den Radius 10 cm; mit aufgewickeltem Kabel 16 cm. Das Kabel selbst hat den Radius 0,6 cm.

- Wie viele m Kabel passen auf die Rolle?
- Erläutere mögliche Ungenauigkeiten bei deinem Vorgehen.



### Aufgabe 4 Bunker

Manchmal findet man noch solche Ein-Mann-Bunker aus Stahlbeton, die im 2. Weltkrieg dem Schutz einzelner Personen dienten. Eine Stahltür (vorn) führte ins Innere, und schmale Schlitzze erlaubten einen Blick ins Freie.

Der abgebildete Bunker hat einen Durchmesser von etwa 1,70 m und ist etwa 2,60 m hoch; die Wandstärke beträgt überall 15 cm .

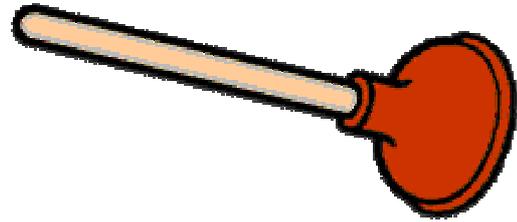
Berechne das Volumen des verwendeten Betons.



### Aufgabe 5 „Pümpel“

Ein „Pümpel“ besteht aus einer hohlen Halbkugel mit einem angesetzten Hohlzylinder aus Gummi, in den der Holzgriff gesteckt wird. Die Hohlkugel hat einen lichten Durchmesser von 12 cm, der Zylinder ist 5 cm hoch und hat einen Innendurchmesser von 3 cm. Die Wandstärke des Gummis beträgt überall 0,5 cm.

Berechne das benötigte Volumen des Gummis.



### Aufgabe 6 Heißluftballon

Die Luftfüllung eines Heißluftballons von 18 m Durchmesser wird durch einen Brenner erhitzt. Dadurch verringert sich die Dichte der Luft von  $1,2 \text{ g/dm}^3$  auf  $0,9 \text{ g/dm}^3$ .

- Um wie viel weniger wiegt die Luft im Heißluftballon als die umgebende Luft?
- Welche Last inklusive Ballon, Hülle und Korb kann der Heißluftballon höchstens tragen?
- Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung des Ballons mindestens?



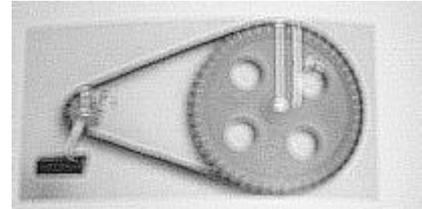
## Aufgaben für Lernkontrollen

GTR

### Aufgabe 1 Fahrradkette

Berechne die Länge der Fahrradkette:

- $r_1 = 3 \text{ cm}$
- $r_2 = 8 \text{ cm}$
- $s = 72 \text{ cm}$  (Abstand der Mittelpunkte der Zahnräder).



### Aufgabe 2 Betonpoller

Wie schwer ist der Betonpoller der nebenstehenden Abbildung? Er hat einen Durchmesser von 35 cm und ist 50 cm hoch (Dichte:  $2,3 \text{ g/cm}^3$ ).



### Aufgabe 3 Lampenschirm

Berechne den Materialbedarf für den Lampenschirm:

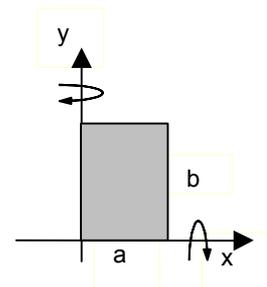
- $r_1 = 10 \text{ cm}$
- $r_2 = 4 \text{ cm}$
- $s = 20,5 \text{ cm}$ .



### Aufgabe 4 Rotation von Flächen

Das Rechteck im Bild rotiert einmal um die x-Achse, einmal um die y-Achse.

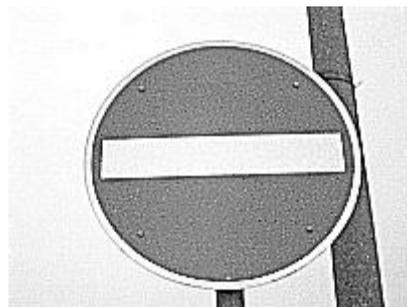
- Berechne Volumen und Oberfläche für beide Rotationskörper.
- Zeige: Die Volumina und die Oberflächeninhalte verhalten sich wie  $a:b$ .



**Aufgabe 5** Verkehrsschild

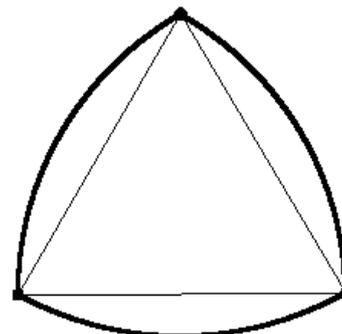
Berechne das Verhältnis der roten zur weißen Fläche:

- a) Durchmesser des Schildes: 56 cm
- b) Breite des weißen Ringes: 1,5 cm
- c) Höhe des Balkens: 9 cm
- d) Breite des Balkens: 48 cm.



**Aufgabe 6** Bogendreieck

Drei Kreisbögen um die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, wobei der Radius gleich der Seitenlänge ist, bilden ein Bogendreieck. Berechne den Flächeninhalt, wenn die Seitenlänge des Dreiecks 16 cm beträgt.



## 8.2.4 Anlagen: Ergänzungen und Lösungshinweise zu den Arbeitsblättern

### Anlage 1

<b>Lösungshinweise zur Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Rechteckssummen</b>	<b>TI-89/Voyage 200</b>

Die Berechnung der Flächeninhalte von Rechteckflächen für größere Streifenzahlen soll dem Rechner übergeben werden. Dazu muss die Berechnung der Höhe der Rechtecke mithilfe des Satzes von Pythagoras durchgeführt werden.

Hinweise zum Rechnereinsatz

(am Beispiel der Obersumme  $O_5$  und Untersumme  $U_5$ )

**TI 89** (entsprechend **TI 92 PLUS, Voyage**)

5 STO► m                                      Belegen der Streifenzahl m (im Home-Editor)

**Erstellen einer Liste**                                      Apps 6 (Data/Matrix Editor) 3 New

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| c1: seq(n,n,0,1,1/m)  | Berechnung der Stützstellen im Intervall [0;1], Schrittweite 1/5 |
| c2: $\sqrt{(1-c1^2)}$ | Höhe der Rechteckstreifen  |
| c3: c2*1/m            | Flächeninhalt eines Streifens                                    |
| c4: sum(c3)           | Obersumme (Viertelkreis)   |
| c5: 4*c4              | Obersumme des Einheitskreises                                    |
| c6: c4-1/m            | Untersumme (Viertelkreis)  |
| c7: 4*c6              | Untersumme des Einheitskreises                                   |

m=5 (und m=500)

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Plot Setup</th><th>F3-Cell</th><th>F4-Header</th><th>F5-Calc</th><th>F6-It1</th><th>F7-Stat</th></tr> <tr><td>DATA</td><td>z-ste...</td><td>^-hoe...</td><td>strei...</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>c1</td><td>c2</td><td>c3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>.2</td><td>.9798</td><td>.19596</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>.4</td><td>.91652</td><td>.1833</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>.6</td><td>.8</td><td>.16</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="7">c1=seq(n,n,0,1,1/n)</td></tr> <tr><td colspan="7">MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC</td></tr> </table>	F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat	DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...					c1	c2	c3				1	0	1	.2				2	.2	.9798	.19596				3	.4	.91652	.1833				4	.6	.8	.16				c1=seq(n,n,0,1,1/n)							MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC							<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Plot Setup</th><th>F3-Cell</th><th>F4-Header</th><th>F5-Calc</th><th>F6-It1</th><th>F7-Stat</th></tr> <tr><td>DATA</td><td>z-ste...</td><td>^-hoe...</td><td>strei...</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>c1</td><td>c2</td><td>c3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>.2</td><td>.9798</td><td>.19596</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>.4</td><td>.91652</td><td>.1833</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>.6</td><td>.8</td><td>.16</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="7">c2=4*(1-c1^2)</td></tr> <tr><td colspan="7">MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC</td></tr> </table>	F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat	DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...					c1	c2	c3				1	0	1	.2				2	.2	.9798	.19596				3	.4	.91652	.1833				4	.6	.8	.16				c2=4*(1-c1^2)							MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC							<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Plot Setup</th><th>F3-Cell</th><th>F4-Header</th><th>F5-Calc</th><th>F6-It1</th><th>F7-Stat</th></tr> <tr><td>DATA</td><td>z-ste...</td><td>^-hoe...</td><td>strei...</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>c1</td><td>c2</td><td>c3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>.2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>.2</td><td>.9798</td><td>.19596</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>.4</td><td>.91652</td><td>.1833</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>.6</td><td>.8</td><td>.16</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="7">c3=c2*/r</td></tr> <tr><td colspan="7">MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC</td></tr> </table>	F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat	DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...					c1	c2	c3				1	0	1	.2				2	.2	.9798	.19596				3	.4	.91652	.1833				4	.6	.8	.16				c3=c2*/r							MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC							<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Plot Setup</th><th>F3-Cell</th><th>F4-Header</th><th>F5-Calc</th><th>F6-It1</th><th>F7-Stat</th></tr> <tr><td>DATA</td><td>st-re...</td><td>o-vie...</td><td>i-obe...</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>c3</td><td>c4</td><td>c5</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>.2</td><td>.85926</td><td>3.437</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>.19596</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>.1833</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>.16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="7">c5=c4*4</td></tr> <tr><td colspan="7">MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC</td></tr> </table>	F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat	DATA	st-re...	o-vie...	i-obe...					c3	c4	c5				1	.2	.85926	3.437				2	.19596						3	.1833						4	.16						c5=c4*4							MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC						
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat																																																																																																																																																																																																																																																									
DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...																																																																																																																																																																																																																																																												
	c1	c2	c3																																																																																																																																																																																																																																																												
1	0	1	.2																																																																																																																																																																																																																																																												
2	.2	.9798	.19596																																																																																																																																																																																																																																																												
3	.4	.91652	.1833																																																																																																																																																																																																																																																												
4	.6	.8	.16																																																																																																																																																																																																																																																												
c1=seq(n,n,0,1,1/n)																																																																																																																																																																																																																																																															
MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC																																																																																																																																																																																																																																																															
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat																																																																																																																																																																																																																																																									
DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...																																																																																																																																																																																																																																																												
	c1	c2	c3																																																																																																																																																																																																																																																												
1	0	1	.2																																																																																																																																																																																																																																																												
2	.2	.9798	.19596																																																																																																																																																																																																																																																												
3	.4	.91652	.1833																																																																																																																																																																																																																																																												
4	.6	.8	.16																																																																																																																																																																																																																																																												
c2=4*(1-c1^2)																																																																																																																																																																																																																																																															
MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC																																																																																																																																																																																																																																																															
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat																																																																																																																																																																																																																																																									
DATA	z-ste...	^-hoe...	strei...																																																																																																																																																																																																																																																												
	c1	c2	c3																																																																																																																																																																																																																																																												
1	0	1	.2																																																																																																																																																																																																																																																												
2	.2	.9798	.19596																																																																																																																																																																																																																																																												
3	.4	.91652	.1833																																																																																																																																																																																																																																																												
4	.6	.8	.16																																																																																																																																																																																																																																																												
c3=c2*/r																																																																																																																																																																																																																																																															
MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC																																																																																																																																																																																																																																																															
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat																																																																																																																																																																																																																																																									
DATA	st-re...	o-vie...	i-obe...																																																																																																																																																																																																																																																												
	c3	c4	c5																																																																																																																																																																																																																																																												
1	.2	.85926	3.437																																																																																																																																																																																																																																																												
2	.19596																																																																																																																																																																																																																																																														
3	.1833																																																																																																																																																																																																																																																														
4	.16																																																																																																																																																																																																																																																														
c5=c4*4																																																																																																																																																																																																																																																															
MAIN                      DEG    IUT1                      FUNC																																																																																																																																																																																																																																																															
m=500																																																																																																																																																																																																																																																															
		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Plot Setup</th><th>F3-Cell</th><th>F4-Header</th><th>F5-Calc</th><th>F6-It1</th><th>F7-Stat</th></tr> <tr><td>DATA</td><td><math>\pi</math>-obe...</td><td>u-vie...</td><td><math>\pi</math>-unt...</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>c5</td><td>c6</td><td>c7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3.1455</td><td>.78437</td><td>3.1375</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="7">r*c7=3.137487477002</td></tr> <tr><td colspan="7">ZEHN                      DEG    APPROX                      FUNC</td></tr> </table>	F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat	DATA	$\pi$ -obe...	u-vie...	$\pi$ -unt...					c5	c6	c7				1	3.1455	.78437	3.1375				2							3							4							r*c7=3.137487477002							ZEHN                      DEG    APPROX                      FUNC																																																																																																																																																																																																				
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-It1	F7-Stat																																																																																																																																																																																																																																																									
DATA	$\pi$ -obe...	u-vie...	$\pi$ -unt...																																																																																																																																																																																																																																																												
	c5	c6	c7																																																																																																																																																																																																																																																												
1	3.1455	.78437	3.1375																																																																																																																																																																																																																																																												
2																																																																																																																																																																																																																																																															
3																																																																																																																																																																																																																																																															
4																																																																																																																																																																																																																																																															
r*c7=3.137487477002																																																																																																																																																																																																																																																															
ZEHN                      DEG    APPROX                      FUNC																																																																																																																																																																																																																																																															

## Anlage 2

Lösungshinweise zur Bestimmung von $\pi$		
Numerisches Näherungsverfahren	Rechteckssummen	TI-83

### TI 83

5 STO► M

Belegen der Streifenzahl M (im Home-Editor)

#### Erstellen einer Liste

L1="seq(n,n,0,1,1/M)"

STAT 1: Edit

Berechnung der Stützstellen im Intervall [0;1], Schrittweite 1/M

L2="√(1-L1^2)"

Höhe der Rechteckstreifen

L3="L2\*1/M"

Flächeninhalt eines Streifens

L4(1)=sum(L3)

Obersumme (Viertelkreis)

L5="4\*L4"

Obersumme des Einheitskreises

L6="L4-1/M"

Untersumme (Viertelkreis)

L7="4\*L6"

Untersumme des Einheitskreises

Die Anführungszeichen (L1="") sichern die Wiederholbarkeit der Kopfbefehle in den Listen. Der sum-Befehl funktioniert nur innerhalb der Liste (L4(1)), er muss bei der Änderung von m immer neu eingegeben werden.

L1	#	L2	#	L3	#	1
0		1		.2		
.2		.9798		.19596		
.4		.91652		.1833		
.6		.8		.16		
.8		.6		.12		
1		0		0		
-----						
L1="seq(n,n,0,1,						

L2	#	L3	#	L4	4
1		.2			
.9798		.19596			
.91652		.1833			
.8		.16			
.6		.12			
0		0			
-----					
L4(1)=sum(L3)					

Alternativ kann im Home-Editor vorgegangen werden am Beispiel der Obersumme und Untersumme für M=5:

<pre>5→M sum(L3) Ans*4 3.437048829</pre>	<pre>5 Ans*4 .8592622072 3.437048829 sum(L3)-1/M Ans*4 .6592622072 2.637048829</pre>
--	--

Anlage 3

<b>Lösungshinweise zur Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Rechteckssummen</b>	<b>Sharp EL-9900</b>

**EL 9900**

5 STO► M

Belegen der Streifenzahl M (im Home-Editor)

**Erstellen einer Liste**

STAT A: edit list

In L1: seq(X,,0,1,1/M)“

Berechnung der Stützstellen im Intervall [0;1], Schrittweite 1/M

In L2:  $\sqrt{(1-L1^2)}$

Höhe der Rechteckstreifen

In L3: L2\*1/M

Flächeninhalt eines Streifens

In L4(1): sum(L3)

Obersumme (Viertelkreis)

In L4(2): 4\*L4(1)

Obersumme des Einheitskreises

In L5(1): L4(1)-1/M

Untersumme (Viertelkreis)

In L5(2): 4\*L5(1)

Untersumme des Einheitskreises

No	1: L1	2: L2	3: L3	No	3: L3	4: L4	5: L5
1	0	1	0.2	1	0.2	0.859262	0.659262
2	0.2	0.979796	0.195959	2	0.195959	3.437049	2.637049
3	0.4	0.916515	0.183303	3	0.183303	-----	-----
4	0.6	0.8	0.16	4	0.16		
5	0.8	0.6	0.12	5	0.12		
6	1	0	0	6	0		
seq(X,,0,1,1/M)				sum(L3)			

Alternativ kann im Home-Editor vorgegangen werden am Beispiel der Obersumme und Untersumme für M=5:

5=M	Ans×4
sum(L3)	5
Ans×4	3.437048829
	sum(L3)-1÷M
	0.659262207
	Ans×4
	2.637048829

Anlage 4

<b>Lösungshinweise zur Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Rechteckssummen</b>	<b>Voyage 200</b>

**Visualisierung der Rechtecksflächen für die Untersumme und Obersumme**

Mithilfe eines Programms (prout) können die Rechtecke der Untersumme gezeichnet werden:

<pre> (F1) (F2) (F3) (F4) (F5) (F6) Control I/O Var Find... Mode :prout(a,b,n) :Prgm :Local h,i :(b-a)/n&gt;h :ClrGraph :Graph f(x) :For i,0,n-1 :Line a+i*h,0,a+i*h,f(a+i*h) :Line a+(i+1)*h,0,a+(i+1)*h,f(a+(i+1)*h) :Line a+i*h,f(a+(i+1)*h),a+(i+1)*h,f(a+(i+1)*h) :EndFor MAIN          RAD AUTO          FUNC         </pre>	
<pre> (F1) (F2) (F3) (F4) (F5) (F6) Control I/C Var Find... Mode :proobers(a,b,n) :Prgm :Local h,i :(b-a)/n&gt;h :ClrGraph :Graph f(x) :For i,0,n-1 :Line a+i*h,0,a+i*h,f(a+i*h) :Line a+(i+1)*h,0,a+(i+1)*h,f(a+i*h) :Line a+i*h,f(a+i*h),a+(i+1)*h,f(a+i*h) :EndFor :EndPrgm MAIN          RAD AUTO          FUNC         </pre>	

Das Programm kann im HOME-Editor folgendermaßen aufgerufen werden:

$\sqrt{1-x^2}$  STO► f(x) prout(0,1,5) Enter

Hierbei ist die linke Grenze  $a = 0$ , die rechte Grenze  $b = 1$  und eine Unterteilung in 5 Teilintervalle vorgesehen. Entsprechendes gilt für die Obersumme mit dem Aufruf von prob (0,1,5). Die Programme können auch für die Integralrechnung eingesetzt werden.

$\frac{1}{4}x^2$ STO► f(x)    prout (0,2,20)	Enter    prob (0,2,20)    Enter

## Anlage 5

Kurzanleitung für die „Schülerhand-Bestimmung“ von $\pi$		
Numerisches Näherungsverfahren	Archimedes (Eckenverdopplung)	GTR

### Zu 2): Ti-83

- Gib eine rekursiv definierte Folge für  $s_{2n}$  in deinen Rechner ein. Nutze hierzu den Folge-Modus:  $u(1)$  wurde hier mit  $\sqrt{2}$  festgelegt, d. h. man geht von einem einbeschriebenen Quadrat aus.  $u(2)$  berechnet somit die Seitenlänge eines 8-Ecks,  $u(3)$  die eines 16-Ecks usw.
- Mit diesem Programm wird  $\pi$  mithilfe des halben Umfangs angenähert:  $\pi \approx 2^n \cdot s_n$ . Der Wert N gibt die Eckenanzahl des Vielecks an, wobei N=1 für ein Viereck, N=2 für ein 8-Eck, N=3 für ein 16-Eck (s. o.) steht.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)▣√(2-√(4-(u
(n-1))^2))
u(nMin)▣{1.414...
v(n)=
v(nMin)=▣
w(n)=
  
```

```

PROGRAM:PIUMFANG
:Promt N
:For(T,1,N)
:2^T*u(T)▣P
:Disp "SCHRITT",
T,P
:Pause
:End
  
```

### Zu 2): EL 9900

- Gib eine rekursiv definierte Folge für  $s_{2n}$  in deinen Rechner ein. Nutze hierzu den Folge-Modus:  $u(1)$  wurde hier mit  $\sqrt{2}$  festgelegt, d. h. man geht von einem einbeschriebenen Quadrat aus.  $u(2)$  berechnet somit die Seitenlänge eines 8-Ecks,  $u(3)$  die eines 16-Ecks usw.
- Mit  $v(n)$  wird der Umfang berechnet und die Werte von  $u(n)$  und  $v(n)$  können mithilfe der automatisch erzeugten Tabelle (Table) angeschaut werden:

```

u(n)▣√(2-√(4-u(n-1)^2)
u(nMin)={1.414213562}
v(n)▣u(n-1)×2^n-1
v(nMin)={0}
w(n)=
  
```

n	u(n)	v(n)
1	1.414210	
2	0.765372	2.82843
3	0.390183	5.06147
4	0.196083	5.12145
5	0.098143	5.13655
6	0.049083	5.14033
		v(n)=3.140331157

Anlage 6

<b>Lösungshinweise - Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Archimedes (Eckenverdopplung)</b>	<b>GTR (TI-83plus)</b>

Zunächst muss man sich verdeutlichen, dass  $\pi \approx 2^n \cdot s_n$  eine geeignete Näherung darstellt. Hierzu

kann die Darstellung  $\pi \approx \frac{4 \cdot 2^{n-1}}{2} \cdot s_n$  hilfreich sein. Für  $n = 1$  müssen die Seitenlängen mit 4 multipliziert und durch 2 geteilt werden, da es sich beim Ausgangsvieleck um ein Quadrat handelt. In jedem nächsten Schritt muss dann mit 2 multipliziert werden. Für  $n=20$  erhält man z. B:

<pre>N=20 SCHRITT           1 2.828427125 SCHRITT           2 3.061467459</pre>	<pre>          3.140331157 SCHRITT           6 3.141277251 SCHRITT           7 3.141513801</pre>	<pre>          3.141595152 SCHRITT           15 3.141595152 SCHRITT           16 3.14162933</pre>
---	--	---

Zu 3):

<p>Eingabe der Rekursion für <math>S_{2n}</math></p> <pre>Plot1 Plot2 Plot3 (n-1)^2) u(nMin) (1.414 v(n) 4*(sqrt(1+(v( n-1)/2)^2)-1)/v( n-1) v(nMin) (2) w(n)</pre>	<p>Übersicht über die Werte für s und S</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>u(n)</th> <th>v(n)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1.4142</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>.76537</td><td>.82843</td></tr> <tr><td>3</td><td>.58018</td><td>.39782</td></tr> <tr><td>4</td><td>.19602</td><td>.19698</td></tr> <tr><td>5</td><td>.09814</td><td>.09825</td></tr> <tr><td>6</td><td>.04908</td><td>.0491</td></tr> <tr><td>7</td><td>.02454</td><td>.02454</td></tr> </tbody> </table> <p>n=7</p>	n	u(n)	v(n)	1	1.4142	2	2	.76537	.82843	3	.58018	.39782	4	.19602	.19698	5	.09814	.09825	6	.04908	.0491	7	.02454	.02454
n	u(n)	v(n)																							
1	1.4142	2																							
2	.76537	.82843																							
3	.58018	.39782																							
4	.19602	.19698																							
5	.09814	.09825																							
6	.04908	.0491																							
7	.02454	.02454																							
<p>Im Programm wird die Folge u durch die Folge v ersetzt.</p>	<pre>PROGRAM: PIUMFANG :Promt N :For(T,1,N) :2^T*v(T)+P :Disp "SCHRITT", T,P :Pause :End</pre>																								

Wählt man wieder für  $n = 20$ , erhält man u. a.:

<pre>          3.144118385 SCHRITT           6 3.14222363 SCHRITT           7 3.141750369</pre>	<pre>          3.141593302 SCHRITT           12 3.141592729 SCHRITT           13 3.141593302</pre>	<pre>          3.141391932 SCHRITT           19 3.132569664 SCHRITT           20 3.088742905</pre>
---	--	--

Eine gute Übersicht der bisherigen Ergebnisse erhält man mithilfe der Darstellung in Listen. Hierzu ist es notwendig, in den Kopfzeilen der Listen Folgen für die Näherungen von  $\pi$  einzugeben. Die Liste PIUI gibt den Näherungswert an, den man mithilfe der einbeschriebenen Vielecke erhält, und PIUA gibt die entsprechenden Werte für die umbeschriebenen Vielecke an. Die Liste Differenz gibt den jeweiligen Wert der Differenz der Näherungswerte an. Eingabe der Kopfzeilen: PIUI = "seq(2^T\*u(T),T,1,20)", PIUA = "seq(2^T\*v(T),T,1,20)", DIFF = "PIUA-PIUI"

PIUI #	PIUA #	DIFF #14	PIUI #	PIUA #	DIFF #14	PIUI #	PIUA #	DIFF #14
2.8284	4	0.0000	3.1416	3.1416	0.0000	3.1416	3.1416	0.0000
3.0615	3.3137	.25224	3.1416	3.1416	1.5E-5	3.1416	3.1414	-2E-4
3.1214	3.1826	.06115	3.1416	3.1416	3.7E-6	3.1416	3.1413	-3E-4
3.1365	3.1517	.01518	3.1416	3.1416	9.5E-7	3.1414	3.1414	3.6E-5
3.1403	3.1441	.00379	3.1416	3.1416	2.5E-7	3.1414	3.1326	-0.0088
3.1413	3.1422	9.5E-4	3.1416	3.1416	2.9E-7	3.1457	3.0887	-0.057
3.1415	3.1418	2.4E-4	3.1416	3.1416	1.8E-6	-----	-----	-----
DIFF(1) = 1.1715728...			DIFF(8) = 5.9140684...			DIFF(15) = -1.849798...		

Es wird deutlich, dass bei der durchgeführten Näherung nicht die erwarteten Ergebnisse, sondern offensichtlich Fehler auftreten. Die inneren Näherungswerte werden zu groß, die äußeren ganz offensichtlich zu klein, die Folge der Differenzen wächst ab  $N = 14$ .

Zu 4): Im Folge-Modus werden nun die neuen Iterationen eingegeben und analog zu 3) die Listen erstellt. Nun werden die erwarteten Ergebnisse erzielt. An dieser Stelle sollte eine Beurteilung der Iterationsterme durchgeführt werden.

PIUI #	PIUA #	DIFF #14	PIUI #	PIUA #	DIFF #14	PIUI #	PIUA #	DIFF #14
2.8284	4	0.0000	3.1416	3.1416	0.0000	3.1416	3.1416	1.4E-8
3.0615	3.3137	.25224	3.1416	3.1416	1.5E-5	3.1416	3.1416	3.6E-9
3.1214	3.1826	.06115	3.1416	3.1416	3.7E-6	3.1416	3.1416	9E-10
3.1365	3.1517	.01518	3.1416	3.1416	9.2E-7	3.1416	3.1416	2E-10
3.1403	3.1441	.00379	3.1416	3.1416	2.3E-7	3.1416	3.1416	6E-11
3.1413	3.1422	9.5E-4	3.1416	3.1416	5.8E-8	3.1416	3.1416	1E-11
3.1415	3.1418	2.4E-4	3.1416	3.1416	1.4E-8	3.1416	3.1416	0.0000
DIFF(1) = 1.1715728...			DIFF(8) = 5.9140336...			DIFF(20) = 3.9E-12		

Anlage 7

<b>Lösungshinweise - Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Archimedes (Eckenverdopplung)</b>	<b>Sharp EI 9900</b>

Zu 3):

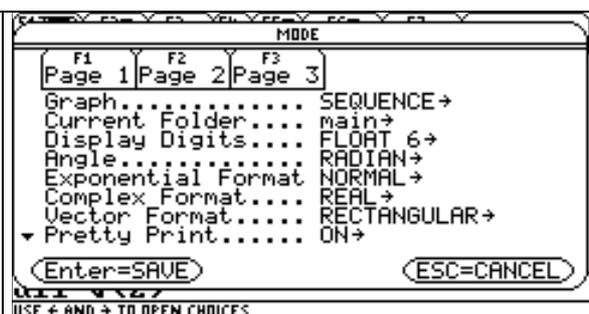
<p>Eingabe der Rekursion für <math>S_{2n}</math> als <math>v(n)</math></p> $v(nMin) = \{1.414213562\}$ $v(n) = 4 \times \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{v(n-1)}{2}\right)^2}}{v(n-1)}$ <p><math>v(nMin) = \{2\}</math>  <math>w(n) =</math></p>	<p>Übersicht über die Werte für <math>s</math> und <math>S</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th><math>u(n)</math></th> <th><math>v(n)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1.414212</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>0.76537</td><td>0.82843</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.39018</td><td>0.39782</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.19603</td><td>0.19698</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.09814</td><td>0.09825</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.04908</td><td>0.0491</td></tr> </tbody> </table> <p><math>n=6</math></p>	$n$	$u(n)$	$v(n)$	1	1.414212		2	0.76537	0.82843	3	0.39018	0.39782	4	0.19603	0.19698	5	0.09814	0.09825	6	0.04908	0.0491																																			
$n$	$u(n)$	$v(n)$																																																							
1	1.414212																																																								
2	0.76537	0.82843																																																							
3	0.39018	0.39782																																																							
4	0.19603	0.19698																																																							
5	0.09814	0.09825																																																							
6	0.04908	0.0491																																																							
<p>Die Differenz sollte eine Nullfolge ergeben - aus Rechnergründen ist die Ausgabe um eins verschoben. Ab einer bestimmten Eckenzahl wird das Verfahren instabil.</p> <p><u>Bemerkung:</u>          Man kann aber genauso wie beim Ti-83 die Werte in Listen ablegen und entsprechend tabellieren lassen.</p>	<p><math>w(n) = v(n) - u(n-1)</math>  <math>w(nMin) = \{0\}</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th><math>u(n)</math></th> <th><math>v(n)</math></th> <th><math>w(n)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1.414212</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.76537</td><td>0.82843</td><td>0.58579</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.39018</td><td>0.39782</td><td>0.06306</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.19603</td><td>0.19698</td><td>0.00764</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.09814</td><td>0.09825</td><td>0.00095</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.04908</td><td>0.0491</td><td>0.00012</td></tr> </tbody> </table> <p><math>w(n) = 0.585786437</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th><math>u(n)</math></th> <th><math>v(n)</math></th> <th><math>w(n)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9</td><td>0.00614</td><td>0.00614</td><td>2.31E-7</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.00307</td><td>0.00307</td><td>2.89E-8</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.00153</td><td>0.00153</td><td>3.56E-9</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.00077</td><td>0.00077</td><td>3.3E-10</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.00038</td><td>0.00038</td><td>-2E-10</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.00019</td><td>0.00019</td><td>-9E-10</td></tr> </tbody> </table> <p><math>w(n) = -2.1332548E-10</math></p>	$n$	$u(n)$	$v(n)$	$w(n)$	1	1.414212		0	2	0.76537	0.82843	0.58579	3	0.39018	0.39782	0.06306	4	0.19603	0.19698	0.00764	5	0.09814	0.09825	0.00095	6	0.04908	0.0491	0.00012	$n$	$u(n)$	$v(n)$	$w(n)$	9	0.00614	0.00614	2.31E-7	10	0.00307	0.00307	2.89E-8	11	0.00153	0.00153	3.56E-9	12	0.00077	0.00077	3.3E-10	13	0.00038	0.00038	-2E-10	14	0.00019	0.00019	-9E-10
$n$	$u(n)$	$v(n)$	$w(n)$																																																						
1	1.414212		0																																																						
2	0.76537	0.82843	0.58579																																																						
3	0.39018	0.39782	0.06306																																																						
4	0.19603	0.19698	0.00764																																																						
5	0.09814	0.09825	0.00095																																																						
6	0.04908	0.0491	0.00012																																																						
$n$	$u(n)$	$v(n)$	$w(n)$																																																						
9	0.00614	0.00614	2.31E-7																																																						
10	0.00307	0.00307	2.89E-8																																																						
11	0.00153	0.00153	3.56E-9																																																						
12	0.00077	0.00077	3.3E-10																																																						
13	0.00038	0.00038	-2E-10																																																						
14	0.00019	0.00019	-9E-10																																																						

Anlage 8

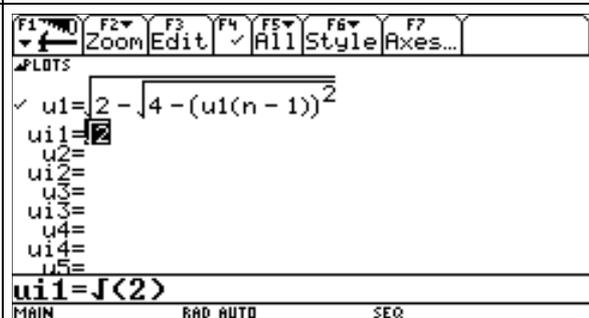
<b>Kurzanleitung - Bestimmung von <math>\pi</math></b>		
<b>Numerisches Näherungsverfahren</b>	<b>Archimedes (Eckenverdopplung)</b>	<b>TI-89/Voyage 200</b>

Kurzanleitung für die Anwendung der numerischen Näherungsverfahren mit einem TI-89/Voyage 200:

Mit der Taste Mode muss zunächst der Graphikmodus auf „SEQUENCE“ („Folgen“) eingestellt werden.



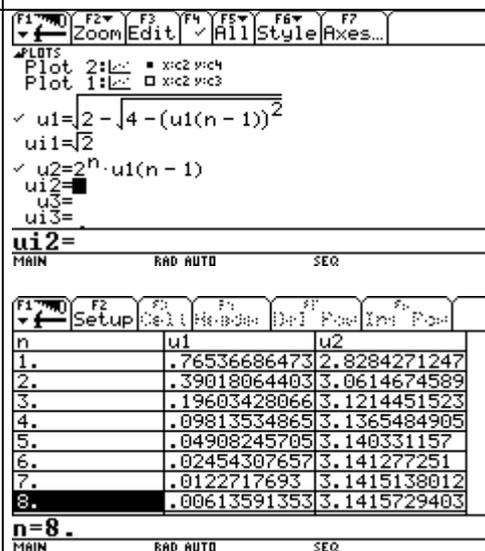
Nun kann man im y-Editor eine rekursive Folge eingeben. Damit wird  $s_{2n}$  ( $u1(n)$ ) aus dem vorherigen Folgenglied  $s_n$  ( $u1(n-1)$ ) berechnet. Ganz wichtig dabei ist die Eingabe eines Startwertes bei  $u1$ . Betrachtet man als Basis ein einbeschriebenes Quadrat, erhält man als Anfangsseitenlange den Wert  $\sqrt{2}$ .



Aus dem Kreisumfang  $U = 2 \cdot \pi$  folgt als erster Näherungswert ( $n=1$ ) für  $\pi$ :

$$\pi = \frac{U_{\text{Kreis}}}{2} \approx \frac{U_{\text{Quadrat}}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2^1 \cdot \sqrt{2}.$$

Da man bei jeder Eckenverdopplung auch die Seitenanzahl verdoppeln muss, gibt also der Term  $u1(n) \cdot 2^n$  einen Näherungswert für  $\pi$  vor der n-ten Verdopplung der Eckenanzahl an. Gibt man diese Berechnungsformel als  $u2(n)$  ein, so werden die Näherungswerte automatisch in TABLE tabelliert.



## Anlage 9

Kurzanleitung - Bestimmung von $\pi$		
Numerisches Näherungsverfahren	Archimedes (Eckenverdopplung)	Excel

## Bestimmung der Kreiszahl Pi mit verschiedenen Näherungsverfahren

n	Einbeschriebene Vielecke				Umbeschriebene Vielecke			
	Iteration 1 Seitenlänge s	Näherung 1	Iteration 2 Seitenlänge s	Näherung 2	Iteration 1 Seitenlänge S	Näherung 1	Iteration 2 Seitenlänge S	Näherung 2
1	=WURZEL(2)	=POTENZ(2;\$A11)*B11	=WURZEL(2)	=POTENZ(2;\$A11)*D11	2	=POTENZ(2;\$A11)*F11	2	=POTENZ(2;\$A11)*H11
=A11+1	=WURZEL(2-WURZEL (4-B11*B11))	=POTENZ(2;A12)*B12	(2+WURZEL(4- D11*D11)))	=POTENZ(2;A12)*D12	=4*(WURZEL(1+(F11* F11/4))-1)/F11	=POTENZ(2;\$A12)*F12	=H11/(WURZEL (1+H11*H11/4)+1)	=POTENZ(2;\$A12)*H12
1	1,414213562	2,828427125	1,414213562	2,828427125	2	4	2	4
2	0,765366865	3,061467459	0,765366865	3,061467459	0,828427125	3,313708499	0,828427125	3,313708499
3	0,390180644	3,121445152	0,390180644	3,121445152	0,397824735	3,182597878	0,397824735	3,182597878
4	0,196034281	3,136548491	0,196034281	3,136548491	0,196982807	3,151724907	0,196982807	3,151724907
5	0,098135349	3,140331157	0,098135349	3,140331157	0,0982537	3,144118385	0,0982537	3,144118385
6	0,049082457	3,141277251	0,049082457	3,141277251	0,049097244	3,14222363	0,049097244	3,14222363
7	0,024543077	3,141513801	0,024543077	3,141513801	0,024544925	3,141750369	0,024544925	3,141750369
8	0,012271769	3,14157294	0,012271769	3,14157294	0,012272	3,141632081	0,012272	3,141632081
9	0,006135914	3,141587725	0,006135914	3,141587725	0,006135942	3,14160251	0,006135942	3,14160251
10	0,00306796	3,141591422	0,00306796	3,141591422	0,003067964	3,141595118	0,003067964	3,141595118
11	0,001533981	3,141592346	0,001533981	3,141592346	0,001533981	3,14159327	0,001533981	3,14159327
12	0,00076699	3,141592577	0,00076699	3,141592577	0,00076699	3,141592808	0,00076699	3,141592808
13	0,000383495	3,141592633	0,000383495	3,141592634	0,000383495	3,141592691	0,000383495	3,141592692
14	0,000191748	3,141592655	0,000191748	3,141592649	0,000191748	3,141592676	0,000191748	3,141592663
15	9,58738E-05	3,141592645	9,58738E-05	3,141592652	9,58738E-05	3,141592691	9,58738E-05	3,141592656
16	4,79369E-05	3,141592607	4,79369E-05	3,141592653	4,79369E-05	3,141592524	4,79369E-05	3,141592654
17	2,39685E-05	3,141592911	2,39684E-05	3,141592654	2,39684E-05	3,14159087	2,39684E-05	3,141592654
18	1,19842E-05	3,141591697	1,19842E-05	3,141592654	1,19842E-05	3,141592524	1,19842E-05	3,141592654
19	5,99212E-06	3,141596554	5,99211E-06	3,141592654	5,99213E-06	3,141600584	5,99211E-06	3,141592654
20	2,99606E-06	3,141596554	2,99606E-06	3,141592654	2,99606E-06	3,141592524	2,99606E-06	3,141592654

Für n=1 und n=2 sind auch die Verwendeten Formeln in den Zellen dargestellt.

Anlage 10

Lösungshinweise - Bestimmung von $\pi$		
<b>Stochastisches Näherungsverfahren</b>	<b>Monte Carlo</b>	<b>GTR (TI-83plus)</b>

Lösungshinweise für ein Programm zu „Monte Carlo“:

<pre>PROGRAM: MONTCARL : Prompt N : seq(rand, I, 1, N) : → LMCX : seq(rand, J, 1, N) : → LMCY : √( LMCX^2+ LMCY^2 : ) → LBETRA</pre>	<p><u>Zum Programmaufbau:</u></p> <p>N als Anzahl für die zu erzeugenden Punkte wird abgefragt.</p> <p>Es wird jeweils eine Liste für die x-Werte und eine Liste für die y-Werte zufällig erzeugt, wobei alle Koordinaten zwischen 0 und 1 liegen.</p> <p>Für jeden so erzeugten Punkt wird der Abstand zum Ursprung ermittelt und in die entsprechende Liste eingetragen.</p>
<pre>PROGRAM: MONTCARL : iPart(LBETRA) → L : INT : sum(LINT) → A : (N-A)/N*4 → P : DispGraph : Pause : Disp "ERMITTELT</pre>	<p>In einer weiteren Liste wird der ganzzahlige Teil des jeweiligen Betrages - also 0 oder 1 - eingetragen.</p> <p>Nun kann durch Aufsummieren dieser Liste ermittelt werden, wie viele zufällig erzeugten Punkte innerhalb und wie viele außerhalb des Viertelkreises liegen.</p> <p>A gibt die Anzahl der außerhalb des Viertelkreises liegenden Punkte an. (Es entsteht ein Fehler, wenn ein Punkt zufällig auf dem Kreisrand liegt.)</p>
<pre>PROGRAM: MONTCARL : sum(LINT) → A : (N-A)/N*4 → P : DispGraph : Pause : Disp "ERMITTELT : ER WERT", P : :</pre>	<p>Die Anzahl der im Kreis liegenden Punkte, dividiert durch die Gesamtzahl der Punkte, multipliziert mit 4 ergibt dann den Näherungswert für <math>\pi</math>.</p> <p>Mit „Dispgraph“ kann ein Bild des Zufallsregens erzeugt werden.</p> <p>Nach Drücken der „enter“-Taste wird dann der ermittelte Näherungswert angegeben.</p>

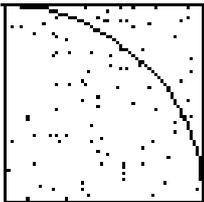
Hinweis:

Die Funktionsgleichung für den Viertelkreis ist vor dem Programmstart im y = Menue eingegeben worden, ebenso wie die Darstellung des Quadrates. Eine passende Fenstereinstellung wurde vorgenommen. Auch diese „Voreinstellungen“ könnten noch in das Programm aufgenommen werden. Aus Gründen der Übersicht wurde darauf hier jedoch verzichtet.

Anlage 11

Lösungshinweise - Bestimmung von $\pi$		
Stochastisches Näherungsverfahren	Monte Carlo	GTR (EL 9900)

Lösungshinweise für ein Programm zu „Monte Carlo“:

<pre> MONTECAR ----- Input "ANZAHL: ",Z ClrDraw Line(0,0,50,0) Line(50,0,50,50) Line(50,50,0,50) Line(0,50,0,0) Circle(0,0,50) 0=N For M,1,Z   rndInt(0,50)→X:   rndInt(0,50)→Y:   PntOn(X,Y):   If X<sup>2</sup>+Y<sup>2</sup>≤2500   Then   N+1=N   Else   EndIf Next Wait Print "INNERHALB:" Print N Print "PI:" N÷2×4→P Print P </pre>	<p><u>Zum Programmaufbau:</u></p> <p>Z als Anzahl für die zu erzeugenden Punkte wird abgefragt.</p> <p>Ein Quadrat mit der Seitenlänge 50 und ein Viertelkreis mit r=50 wird gezeichnet.</p> <p>Z-mal werden Zufallskoordinaten gezogen, der Punkt gezeichnet und überprüft, ob er innerhalb des Viertelkreises liegt. Dann wird der Zähler n um eins erhöht.</p> <p><u>Bemerkung:</u> Vorab muss das Window entsprechend eingestellt werden: Xmin=0, Xmax=100, ymin=0, Ymax=50. Des Weiteren muss das Raster ausgeschaltet werden.</p>
<pre> MONTECAR ----- ANZAHL: 100 </pre>	 <pre> ----- ANZAHL: 100 INNERHALB: 78 PI: 3.12 Done </pre>

Anlage 12

Lösungshinweise - Bestimmung des Kegelvolumens		
Numerisches Näherungsverfahren	Treppenkörper	GTR (TI-83plus)
<pre>4→R 11→H seq((R*(1-I/11))^2*π*H/11,I,1,11)</pre>		<p>Mit dieser Eingabe einer Folge werden die Volumina der einzelnen Scheiben ermittelt. R und H können entsprechend der Aufgabenstellung festgelegt werden.</p>
<pre>sum(seq((R*(1-I/11))^2*π*H/11,I,1,11)) 159.935626</pre>		<p>Durch die Aufsummierung erhält man einen ersten Näherungswert.</p>
<pre>sum(seq((R*(1-I/501))^2*π*H/501,I,1,501)) 183.7553195</pre>		<p>Die Berechnung der Verfeinerung gelingt schnell durch das Ersetzen der Zahl 11 durch die Zahl 501.</p>
<pre>sum(seq((R*(1-I/600))^2*π*H/600,I,1,600)) 183.8462581</pre>		<p>Die Kontrollrechnung für 599 Scheiben zeigt die erreichte Genauigkeit.</p> <p>Das Volumen des umschriebenen Zylinders beträgt: <math>V_{Zyl} = 4^2 \cdot \pi \cdot 11 \approx 552,92</math>.</p> <p>Es ergibt sich der gesuchte Vorschlag zur Berechnung des Kegelvolumens: <math>V_{Keg} = \frac{1}{3} G \cdot h</math></p>

Die dargestellten Verfahren lassen sich genauso im Sharp EL9900 bzw. TI 89/Voyage umsetzen.

Anlage 13

Ergänzende Hinweise und Hilfestellungen		
Solve-Befehl	Funktionszuweisung	-

<p>In der Praxis werden Gleichungen häufig mithilfe moderner Rechner gelöst. Falls du über einen CAS-Rechner verfügst, erfolgt die Berechnung exakt; bei grafikfähigen Taschenrechnern erhält man auf numerischem Weg ein Ergebnis. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Bildschirmausdruck eines CAS-Rechners. Der solve-Befehl wird entweder über die Tastatur eingegeben oder aus dem Algebra-Menü aufgerufen.</p>	
<p>Ebenso hilfreich kann es sein, die Formelsammlung aus deinem Heft auf deinen Rechner zu übertragen. Was du hier benutzt, nennen Mathematiker eine Funktion zweier Veränderlicher. In der Abbildung siehst du dies am Beispiel der Kegelmantelfläche einmal ausgeführt. Vorteil: Du kannst sehr schnell aus den gegebenen Daten den Wert für die Mantelfläche bestimmen.</p>	
<p>Auch bei umgekehrten Fragestellungen bist du im Vorteil. Mithilfe der solve-Funktion hast du zum Beispiel die Frage, wie hoch ein Kegel mit einem Grundkreisradius von 4 cm sein muss, auf Knopfdruck beantwortet.</p>	

### 8.2.5 Literatur

- [1] *Niedersächsisches Kultusministerium*: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7 - 10, Mathematik. Hannover 2003.
- [2] *Bruder, R.*: Methoden und Techniken des Problemlöselernens. Vortragsmanuskript, Laatzen 2003, S. 11-27.
- [3] *Cukrowicz, J., Zimmermann, B. (Hrsg.)*: MatheNetz 10. Diesterweg, Braunschweig 2002.

### 8.2.6 Kontakt

Christian Bräuer

*CBraeuer@gymnasium-himmelsthuer.de*

Jürgen Enders

*aj.enders@t-online.de*

Werner Fleischhauer

*Werner.Fleischhauer@t-online.de*

Richard Hansen

*Rihan@t-online.de*

Martin Koch

*m.b.koch@t-online.de*

Gudrun Köppen-Castrop

*Koeppen-Castrop@t-online.de*

Melanie Krauß

*Krauss.m@gmx.net*

Elke Rumpel

*hrumpel@t-online.de*