7 Gleichungslöseverfahren

7.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „3.3.7 Gleichungslöseverfahren“

Die Verfügbarkeit eines Rechners ermöglicht es, universelle, einheitliche Strategien zur numerischen Lösung unterschiedlicher Gleichungstypen zu erarbeiten. Neben das tabellarische und das grafische Lösen treten Iterationsverfahren und in speziellen Fällen symbolische Verfahren. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, aus der Vielfalt der Lösungsverfahren das dem Problem angemessene auszuwählen; dazu müssen sie ein grundlegendes Verständnis für die einzelnen Verfahren erwerben.

Die Beschränkung auf symbolische Lösungsverfahren und die damit einher gehende Reduktion auf Gleichungen einfachen Typs ist durch den Einsatz von GTR oder CAS nicht mehr sinnvoll. Beim numerischen Lösen ist also die Einteilung in unterschiedliche Gleichungstypen nicht notwendig. Durch den Rechnereinsatz eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten, interessante Fragestellungen und realitätsnahe Anwendungen im Unterricht mit vertretbarem Zeitaufwand zu behandeln.

Das heuristische Vorgehen „Isolierung der Variablen“ beim symbolischen Lösen behält in Spezialfällen seine Bedeutung; es muss aber nicht mehr so zeitaufwändig eingeübt werden (vgl. Kapitel 2.5). Dadurch gewinnt man Zeit z. B. zum Behandeln komplexerer Aufgaben oder zur Umsetzung von Lösungsalgorithmen in ein Programm, etwa für quadratische Gleichungen.

Bei der Erarbeitung eines iterativen Lösungsverfahrens bieten sich Möglichkeiten, Grenzen des Rechners beispielhaft aufzuzeigen. Dabei kann auch auf Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens eingegangen werden.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
Gleichungen aus Anwendungen oder innermathematischen Fragestellungen Gleichungslöseverfahren systematisches Probieren mit Tabellen Ablesen von Schnittpunktskoordinaten zugehöriger Graphen Iterationsverfahren rechnerspezifische Gleichungslöser symbolische Lösungsverfahren, insbesondere Faktorisieren, quadratische Gleichungen heuristische Strategien Rückwärtsarbeiten zielgerichtetes Probieren	VERNETZUNG Termumformungen (3.2.6) Lösungsverfahren für lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme (3.2.9) Heron-, Intervallhalbierungsverfahren (3.3.6) Quadratische Funktion (3.3.4) Wachstum (3.3.10) DIDAKTIK/METHODIK variationsreiches Üben Realitätsbezug

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Hannover 2003, Seite 33)

7.2 Unterrichtseinheit „Gleichungslöseverfahren“

Übersicht über die Materialien zum Baustein 3.3.7

7.2.1	Gleichungen aufstellen - Gleichungen lösen, grafisch-numerische Lösung	207
7.2.2	Quadratische Gleichungen, symbolische Lösung	224
7.2.3	Iteration zur Bestimmung von Nullstellen mit Vorzeichenwechsel	236
7.2.4	Lösen von Gleichungen mithilfe der Fixpunktiteration	245

7.2.1 Gleichungen aufstellen - Gleichungen lösen, grafisch-numerische Lösung

Im Vordergrund der nachfolgenden Unterrichtssequenz stehen das Aufstellen von Gleichungen und die vielfältigen Möglichkeiten bzw. Herangehensweisen beim Lösen von Gleichungen:

- sinnvolles Probieren - „Probiermethode“
- grafisches Lösen - als Schnittpunktbestimmung oder Nullstellen-Problem
- tabellarische Lösung - mit wiederholter Verfeinerung der Schrittweite
- numerische Lösung - mit universellen Gleichungslösern (z. B. SOLVER- Funktion des GTR),

insbesondere unter Zuhilfenahme der grafisch-numerischen Lösungsmöglichkeiten bei der Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR).

Die Schülerinnen und Schüler können und sollen die Erfahrung machen, dass anwendungsorientierte Fragestellungen auf unterschiedliche Gleichungen und Gleichungstypen führen. Sie sollen die Vorzüge und Nachteile der unterschiedlichen Lösungsansätze einordnen können und lernen, ein für die Situation angemessenes Verfahren auszuwählen.

Im Anschluss an diese Unterrichtssequenz könnte sich die Beschäftigung mit einem iterativen Verfahren (z. B. der Intervallhalbierung) anschließen. Der Einsatz einer Tabellenkalkulation (TBK) eignet sich hier in besonderer Weise. Symbolische Lösungsverfahren (quadratische Gleichungen) können ebenfalls nachfolgend erarbeitet und den grafisch-numerischen Ansätzen gegenübergestellt werden.

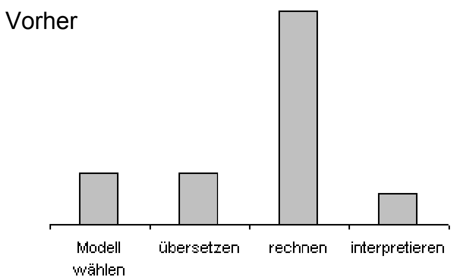
besondere Materialien/Technologie:	**Dauer der Unterrichtseinheit:**
• grafikfähiger Taschenrechner	• 5 - 6 Unterrichtsstunden

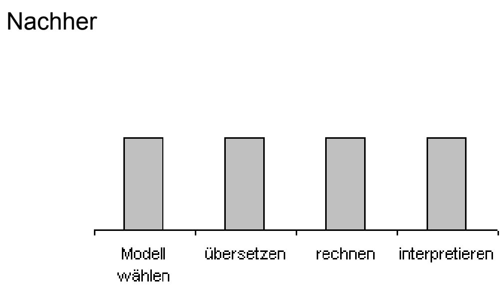
Gliederung

7.2.1.1	*Vorwort: Gleichungen in der Schulmathematik*	*208*
7.2.1.2	*Grafisch-numerisches Lösen von Gleichungen mithilfe von Rechnern*	*209*
7.2.1.3	*Gleichungen aufstellen - Gleichungen lösen*	*211*
7.2.1.4	*Weitere Aufgabenbeispiele*	*217*
7.2.1.5	*Lösen von Gleichungen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm*	*220*
7.2.1.6	*Literatur*	*224*
7.2.1.7	*Kontakt*	*224*

7.2.1.1 Vorwort: Gleichungen in der Schulmathematik

Gleichungen durchziehen wie ein roter Faden den gesamten Mathematikunterricht. Im Sekundarbereich I werden Lösungsalgorithmen für lineare, quadratische und einfache exponentielle Gleichungen behandelt. Kommt es dabei zu einer Überbetonung der Lösungsalgorithmen, wird das Lösen oft nur schematisch durchgeführt. Die Herausbildung inhaltlicher Vorstellungen von Gleichungen und deren Lösungsverfahren muss im Mathematikunterricht einen größeren Stellenwert erhalten. Der Computer kann dabei helfen, dem Aufstellen von Gleichungen, der Interpretation sowie der Lösungsvielfalt mehr Gewicht zu geben. Auch die neuen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss sprechen sich gegen eine Überbetonung der Vermittlung von Rechenfertigkeiten aus. Vielmehr soll das Modellieren, das Argumentieren und das vielfältige Übersetzen einen größeren Stellenwert im Mathematikunterricht erhalten.





Das grafische und numerische Lösen von Gleichungen hat im Unterricht oft einen geringen Stellenwert; Näherungswerte sind etwas Unvollkommenes und der exakten Lösung nicht gleichwertig. Dies kann bei Schülerinnen und Schülern zu Fehlvorstellungen und zu der Annahme führen, zu jedem Gleichungstyp würde es immer exakte Lösungsverfahren geben.

Die folgenden Klassen von Gleichungen kommen in der Schulmathematik vor:

1. Polynomgleichungen $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$; $n \in \mathbf{N}$, $a_i \in \mathbf{R}$

   Diese Gleichungen sind zwar bis zum Grade $n = 4$ algebraisch auflösbar, aber schon für $n = 3$ und $n = 4$ nur mit großem Aufwand. Für $n > 4$ gibt es keine allgemeinen algebraischen Lösungen - ein Ergebnis der Galois-Theorie. Falls Gleichungen mit Grad $n > 4$ behandelt werden, so sind das nur Spezialfälle, bei denen z. B. durch Linearisierung auf die Lösungen geschlossen werden kann. Auf Schulniveau kommen eigentlich nur die linearen und die quadratischen Gleichungen in Frage.

   Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen werden in Polynomgleichungen überführt. Diese Gleichungen wurden in der Schulmathematik meist kontextfrei behandelt und dienen in erster Linie zum Einüben von Algorithmen.

2. Transzendente Gleichungen
   Transzendente Gleichungen sind grundsätzlich nicht algebraisch lösbar. In diesen Gleichungen treten die transzendenten Funktionen wie die *Sinus*- und die *Exponential-Funktion* in Verbindung mit linearen Funktionen auf.

Um immer exakte Lösungen zu erhalten, hat man sich in der Schulmathematik lange oft künstlich auf lineare und quadratische Funktionen beschränkt. Dies bedeutet einerseits eine Beschränkung der Funktionenvielfalt und andererseits eine Einengung der Anwendungsmöglichkeiten. Schülerinnen und Schüler sollten erfahren, dass bereits einfache Probleme zu Gleichungen führen, die nicht mehr mit den vorhandenen Instrumentarien gelöst werden können.

Näherungsverfahren gelten oft als unvollkommen und anrüchig, weil sie nur numerische Ergebnisse liefern. Bei Anwendungsproblemen ist die Genauigkeit der Näherungslösungen in der Regel angemessen. Zudem sind sie mit den üblichen Verfahren (prinzipiell) beliebig genau berechenbar.

Aber auch wenn algebraische Lösungsverfahren bei einer Gleichung existieren, können numerische Verfahren durchaus sinnvoll sein. Überschlagsrechnen und systematisches Probieren sind insbesondere dann nicht als minderwertig anzusehen, wenn man gar keine exakten Ergebnisse benötigt.

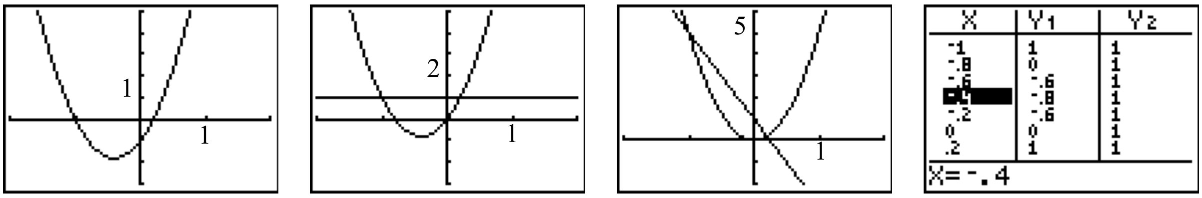
7.2.1.2 Grafisch-numerisches Lösen von Gleichungen mithilfe von Rechnern

Es ist unumstößlich: Alle Gleichungen des Sekundarbereichs I lassen sich mit dem Computer lösen. Ein CAS liefert, sofern möglich, exakte Lösungen, die Genauigkeit numerischer Lösungen mit Hilfe von Tabellenkalkulations-Programmen (TPK) oder grafikfähigen Taschenrechnern ist in Anwendungskontexten völlig ausreichend. Hierin besteht die Chance, ein umfassenderes Wissen über das Lösen von

Gleichungen aufzubauen. Die Möglichkeit des Darstellens von Lösungen auf der symbolischen, numerischen, tabellarischen und grafischen Ebene führt zu inhaltlichen Vorstellungen über die Lösungen von Gleichungen. Es sollte im Unterricht deutlich werden, dass jede Darstellung ihre Berechtigung hat. So kann z. B. der zugehörige Graph sofort einen Überblick über die Anzahl der Lösungen geben, eine symbolische Lösung kann Aussagen über Symmetrien und „Parameterabhängigkeiten" liefern.

Beispiel: Löse mit einem beliebigen Verfahren $5x^2 + 4x = 1$.

$y_1 = 5x^2 + 4x - 1$ $\quad$ $y_1 = 5x^2 + 4x; \quad y_2 = 1$ $\quad$ $y_1 = 5x^2; \quad y_2 = 1 - 4x$ $\quad$ $y_1 = 5x^2 + 4x; \quad y_2 = 1$



Symbolische Lösung: $x = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$. Die Lösungen weisen also eine Symmetrie zu $-\frac{2}{5}$ auf. Mithilfe der Tabelle lässt die sich Symmetrie bezüglich - 0,4 übrigens auch entdecken.

<u>Grafische, tabellarische und iterative Näherungsverfahren</u>

Grafikfähige Taschenrechner bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Gleichung zu lösen. In der Standardform einer Nullstellengleichung $f(x) = 0$ wird der *Graph* in einem Intervall gezeichnet. Der Graph vermittelt einen ersten Überblick über die Nullstellen von f in dem durch das Window vorgegebenen Intervall. Dadurch erhält man einen ersten Überblick über die im Window erfassten Nullstellen. Mit dem Spurmodus bzw. *Trace-Befehl* bekommt man grobe Näherungswerte.

Mit den Befehlen *ZERO, SOLVE* erhält man Näherungslösungen. Die Algorithmen sind nicht dokumentiert (Black-Box). Mithilfe einer Tabelle bekommt man grobe Näherungswerte, die mit einer aufspreizenden Tabelle verbessert werden können.

Gleichungen der Form $f(x) = g(x)$ lassen sich auf eine Nullstellengleichung umformen. Man kann diese Gleichung aber auch als ein Schnittpunktproblem ansehen und dann mithilfe des *Intersection-Befehls* die Schnittpunkte numerisch berechnen lassen.

Systematisches Suchen (noch ohne Algorithmusformulierung) führt auf ein iteratives Verfahren. Dabei erwächst das Intervallhalbierungsverfahren genetisch aus den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler.

Auswirkungen des Rechners auf den zukünftigen Mathematikunterricht
Die Schülerinnen und Schüler werden zukünftig zu entscheiden haben, welche Methode des Gleichungslösens sie anwenden. Geht es etwa um die Lösung eines Anwendungsproblems, so kann die Genauigkeit eines grafischen oder tabellarischen Verfahrens ausreichend sein. Das Aufstellen der Gleichung und das Interpretieren der Lösung(en) bilden hier den Schwerpunkt. Anders sieht es aus, wenn man z. B. die Frage stellt, wieso die numerisch erhaltenen Lösungen der Gleichung $x^2 + 2x - 6 = 0$ die gleichen Nachkommastellen aufweisen. Hier liefert die symbolische Lösung die entscheidenden Einsichten.

7.2.1.3 Gleichungen aufstellen - Gleichungen lösen

1. Stunde: Einführung - Fragen an ein DIN A4-Blatt

Die Lerngruppe wird mit folgender Fragestellung konfrontiert:

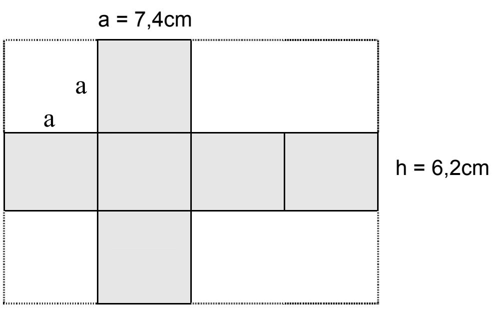
> Kann man aus einem DIN A4-Blatt einen Quader mit quadratischer Grundfläche herstellen, der ein Volumen von 750 cm^3 besitzt?

Erste Erarbeitungsphase: Netz erstellen und ggf. basteln
Als Grundlage für die weitere Arbeit reicht ein Netz, die Anfertigung eines Körpermodells ist nicht unbedingt erforderlich, kann aber für einige Schülerinnen und Schüler hilfreich sein *(Sozialform: Partnerarbeit, Einzelarbeit).*

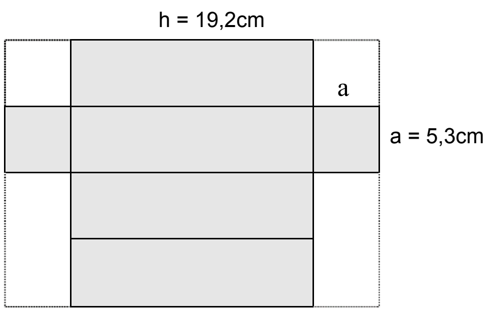
Erwartetes Ergebnis
Aus den Abmessungen des DIN A4-Blattes (29,7 cm x 21 cm) ergeben sich zwei naheliegende Möglichkeiten mit den folgenden Abmessungen (sinnvoll auf eine Dezimale gerundet):

Quader 1: $a = 7{,}4\text{ cm}$, $h = 6{,}2\text{ cm}$ $V = 339{,}1\text{ cm}^3$; Quader 2: $a = 5{,}3\text{ cm}$, $h = 19{,}2\text{ cm}$, $V = 529{,}2\text{ cm}^3$.

Im Unterricht sollten beide Möglichkeiten problematisiert werden.



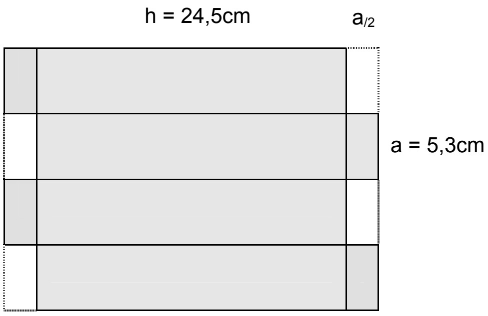
Quader 1



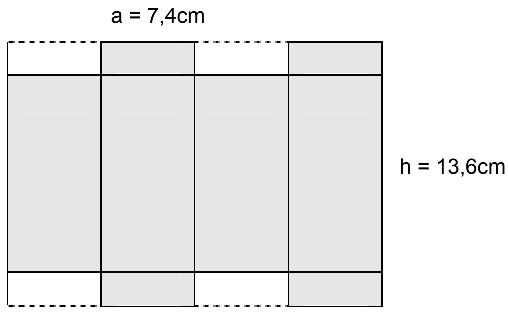
Quader 2

Mit den Netzen zu Quader 3 und Quader 4 erhält man:

Quader 3: $a = 5{,}3\text{ cm}$, h = 24,5 cm, V = 673,9 cm^3 ; Quader 4:, $a = 7{,}4\text{ cm}$, h = 13,6 cm, V = 748,4 cm^3 .



Quader 3



Quader 4

Fazit: Die Aufgabe ist so nicht lösbar *(Materialverlust).*

<u>Zweite Erarbeitungsphase:</u> Variation des Ausgangsproblems

> Kann man einen Quader mit quadratischer Grundfläche und der Oberfläche $623{,}7\text{ cm}^2$ (DIN A4-Blatt) herstellen, der ein Volumen von $750\,\text{cm}^3$ hat?

In dieser 2. Erarbeitungsphase (Gruppenarbeit) sind folgende Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler denkbar: Probieren, Tabelle erstellen, Aufstellen von Formeln mit Einsetzen von konkreten Werten, Finden von Zusammenhängen mit Gespür für die Nebenbedingungen.

Das Ziel dieser Unterrichtsphase soll sein, Maße für einen Quader mit mindestens $750\,\text{cm}^3$ Inhalt zu finden.

Begleitend können die Schülerinnen und Schüler ein Lerntagebuch führen. Als Hausaufgabe bietet sich dann die Anfertigung eines Textes an (Was haben wir heute gemacht? Wo hatten wir Probleme? Wo hatte ich Probleme? Was fiel mir leicht? …).

<u>2. Stunde:</u> Systematisches Verfahren zur Lösung des Ausgangsproblems

Es wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler die Maße für größere Volumina gefunden haben, nicht aber Maße für das Volumen von exakt $750\,\text{cm}^3$.

Aufgabenstellung für eine erste Erarbeitungsphase

„Findet Ansätze zur Lösung, die über ein Probieren hinausgehen".

Ein weiterer Impuls könnte sein: „Welche Terme beschreiben das Volumen und die Oberfläche des Quaders?"

Das Aufstellen der Gleichungen für das Volumen und die Oberfläche des Quaders sollte der Lerngruppe selbstständig gelingen. Dies führt in unserem Beispiel zu den Gleichungen:

$$O = 2 \cdot a^2 + 4a \cdot h \text{ bzw.} \qquad (1)\ 623{,}7 = 2 \cdot a^2 + 4a \cdot h$$

$$V = a^2 \cdot h \text{ bzw.} \qquad (2)\ 750 = a^2 \cdot h$$

Lehrerimpuls bei Schwierigkeiten

Vorgehensweisen bei linearen Gleichungssystemen

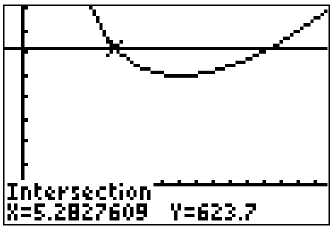
Erwartete Schülervorschläge

Einsetzungsverfahren: z. B. $h = \frac{750}{a^2}$ und einsetzen in (1) liefert: $623{,}7 = 2 \cdot a^2 + \frac{3000}{a}$

Gleichsetzungsverfahren: $h = \frac{623{,}7}{4 \cdot a} - \frac{a}{2}$ und $h = \frac{750}{a^2}$ führt auf: $\frac{750}{a^2} = \frac{623{,}7}{4 \cdot a} - \frac{a}{2}$

Die Alternative, statt der Variablen h die Variable a zu eliminieren, sollte auch angesprochen werden. Ziel ist es nicht, mithilfe einer Gleichung zu einer Lösung zu gelangen, sondern die Vielfalt der Lösungswege aufzuzeigen. Durch geeignete Multiplikation mit a bzw. a^2 kann die Verwendung von Bruchgleichungen umgangen werden.

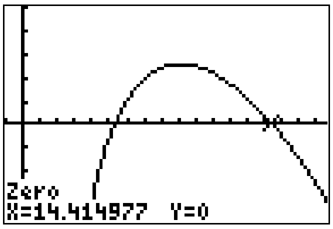
In der anschließenden Erarbeitungsphase sollen die Schülerinnen und Schüler eine selbstgewählte Gleichung mit dem GTR (oder einem TKP) tabellarisch oder grafisch lösen. In einer Präsentationsphase sollen die Ergebnisse verglichen werden.



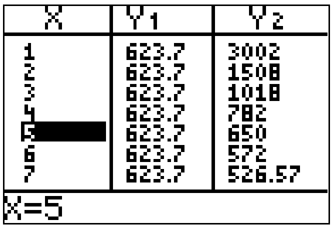
Das obige *Einsetzungsverfahren* liefert die Schnittpunkte der zugehörigen Graphen von $y_1 = 623{,}7$ und $y_2 = 2\,a^2 + 3000\,a^{-1}$.

Man erhält für a die beiden Lösungen $a_1 = 5{,}28$ und $a_2 = 14{,}41$.

Die Schülerinnen und Schüler lernen so „nebenbei" die Addition einer Parabel mit einer Hyperbel kennen und können anschaulich begründen, dass es zwei Lösungen geben muss, wenn der „Scheitelpunkt" unterhalb der Parallelen zu $y_1 = 623{,}7$ liegt.



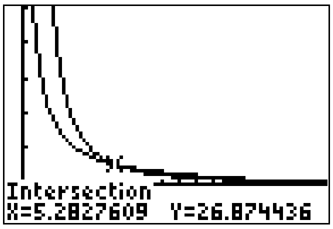
Es sollte nicht versäumt werden, die Lösung durch ein Nullstellenproblem zu erarbeiten, hier mit $y_1 - y_2 = 0$. Wieso ist der zugehörige Graph nach unten geöffnet?



X	Y1	Y2
1	623.7	3002
2	623.7	1508
3	623.7	1018
4	623.7	782
5	623.7	650
6	623.7	572
7	623.7	526.57

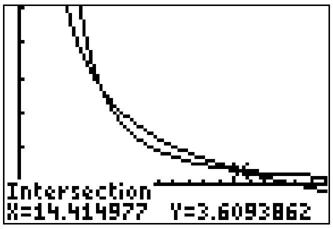
X=5

Die tabellarische Darstellung suggeriert nur eine Lösung zwischen $x = 5$ und $x = 6$: Diese Lösung kann durch Verfeinerung der Schrittweite in der Tabelle weiter eingegrenzt werden, die zweite Lösung zum Ausgangsproblem ist aus der Tabelle aber zunächst nicht abzulesen.

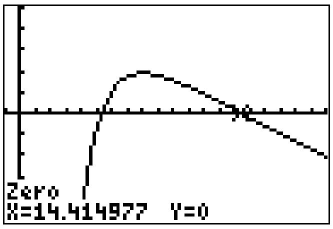


Das *Gleichsetzungsverfahren* liefert die Schnittpunkte der zugehörigen Graphen von $y_1 = \frac{750}{a^2}$ und $y_2 = \frac{623{,}7}{4 \cdot a} - \frac{a}{2}$.

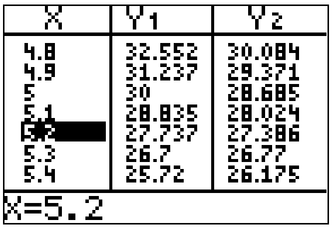
Man erhält für a die beiden Lösungen $a_1 = 5{,}28$ und $a_2 = 14{,}41$.



Die zweite Lösung ist nicht einfach zu erkennen. Die beiden Graphen lassen in der ersten Darstellung keinen zweiten Schnittpunkt erkennen. Hier muss „gezoomt" werden.



Die Lösungssuche wird einfacher, wenn man die Aufgabe wieder als ein Nullstellenproblem formuliert, hier $y_2 - y_1 = 0$.



X	Y1	Y2
4.8	32.552	30.084
4.9	31.237	29.371
5	30	28.685
5.1	28.835	28.024
5.2	27.737	27.386
5.3	26.7	26.77
5.4	25.72	26.175

X=5.2

Auch hier suggeriert die Tabelle, dass nur eine Lösung zwischen x = 5,2 und x = 5,3 zum Ausgangsproblem existiert.

<u>Erwartete Ergebnisse</u>

- Vor- und Nachteile der Lösungsfindung beim tabellarischen bzw. grafischen Vorgehen
- Schwierigkeiten, die 2. Lösung zu finden.

Hausaufgabe

Gibt es auch für V = 1000 cm³ Lösungen unseres Problems?

Alternative: Für V = 750 cm³ die konkreten Quader herstellen.

3. Stunde: Lösungsvielfalt und Üben

Unterrichtsinhalte

1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beim Lösen einer Gleichung
2. Einüben des Gleichungslösens an einem (einfachen) Beispiel
3. Hinführung: SOLVER- Befehl/universeller numerischer Gleichungslöser

Erste Erarbeitung

Variiere das Ausgangsproblem, so dass genau eine Lösung entsteht bzw. keine Lösung entsteht. Diese Fragestellung kann sich schon genetisch aus der Hausaufgabe ergeben.

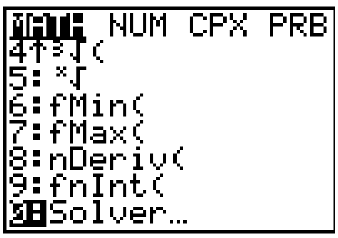
Zweite Erarbeitung

Die Kanten einer quaderförmigen Safttüte mit den Kantenlängen 7 cm, 10 cm und 14 cm sollen zur Verdopplung des Volumens alle um das gleiche Maß verlängert werden.

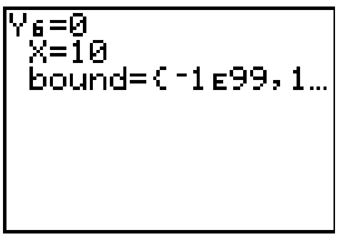
Diese Problemstellung führt auf die Gleichung $(7+x)(10+x)(14+x) = 2\cdot 7\cdot 10\cdot 14$

Es sollte nicht versäumt werden, den Graphen der zugehörigen Funktion mit $f(x) = (7+x)(10+x)(14+x)$ ohne GTR zu skizzieren, da die Funktionsgleichung in Linearfaktoren zerlegt ist. Schülerinnen und Schüler neigen oft dazu, Terme sofort auszumultiplizieren. An dieser Stelle bietet es sich an, über $T_1 \cdot T_2 = 0 \Leftrightarrow T_1 = 0 \vee T_2 = 0$ zu reden. Nicht zuletzt durch diese Diskussion sollte der Graph der Funktion f qualitativ schnell skizziert werden können.

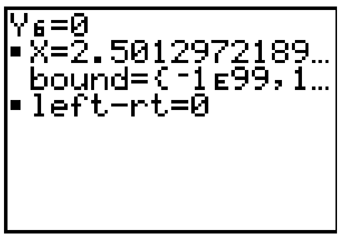
Neben der grafischen und tabellarischen Lösung kann auch der universelle, numerische Gleichungslöser benutzt bzw. eingeführt werden. Er wird beim TI-83 „Solver“ genannt:



Der Solver... befindet sich im MATH-Menü. Die Gleichung ist in der Form $T(x) = 0$ einzugeben.



In diesen Beispiel ist die Funktionsgleichung in y_6 gespeichert. Es ist ein Startwert bzw. Schätzwert (X =) vorzugeben.



Mit dem Befehl *SOLVE* (Tastenkombination [ALPHA] [Enter]) wird eine Lösung berechnet.

Mögliche Hausaufgabe

Variation des Problems (vgl. 7.2.1.4 Weitere Aufgabenbeispiele)

Selbsterfinden einer Aufgabe, die auf eine Gleichung führt oder Einüben des Solve-Befehls anhand von Beispielen.

4. Stunde: *Das Pyramidenproblem - eine neue Funktionsklasse kommt ins Spiel*

Von einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche sind gegeben:

Mantelfläche M = 3000 cm² und Seitenkante s = 50 cm. Berechne die Grundfläche.

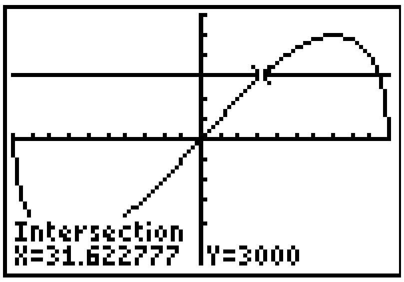
Probleme dieses Typs eignen sich, wenn Schülerinnen und Schüler ausgehend von einer so genannten Initialaufgabe diese möglichst vielfältig variieren sollen. Die Betonung liegt hierbei auf Variation durch Schülerinnen und Schüler. Die *Aufgabenvariation* als Weg zu einem „offenen Unterricht" wird bei *Schupp* [2] sehr ausführlich anhand zahlreicher Beispiele beschrieben.

Das „Pyramidenproblem" führt auf die folgende Gleichung:

$$3000 = 2a \cdot \sqrt{50^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \; .$$

Damit erhält man „genetisch" das Problem, eine Wurzelgleichung zu lösen. Diese Gleichung könnte man natürlich auch exakt lösen (es ergibt sich eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $a_1 = 10\sqrt{10};\quad a_2 = 30\sqrt{10}$). Die grafische Herangehensweise führt auf die beiden Näherungslösungen a_1 = 31,6 cm; a_2 = 94,9 cm und somit auf zwei mögliche Grundflächen (1000cm² und 9000cm²).

Hinweis zum GTR: Nach der Bestimmung eines Schnittpunktes mit dem *Intersection*-Befehl ist die Variable x mit der x-Koordinate des Schnittpunktes belegt. Wird nun x² im „Home"-Bildschirm berechnet, so erhält man die exakten Werte 1000 bzw. 9000. Setzt man die Variable x in die Ausgangsgleichung ein, können sogar die exakten Lösungen verifiziert werden. Dies hätte den Nebeneffekt, dass Wurzelgesetze und das teilweise Ziehen von Wurzeln in einem neuen Kontext geübt würden.



Weiterführende Fragen liegen auf der Hand:

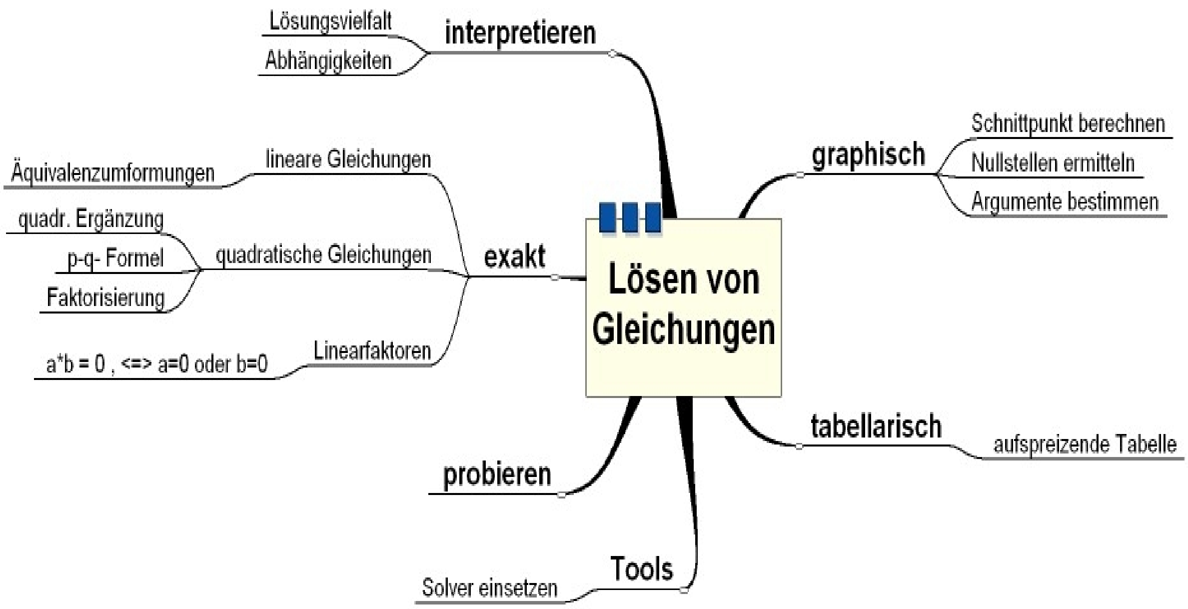
Bei welcher Mantelfläche gibt es genau eine Lösung, keine Lösung? Kann es mehr als zwei Lösungen geben?

Welche Lösungen ergeben sich, wenn statt der Mantelfläche die Oberfläche gegeben ist? Wieso sind bei Variation der Mantelfläche alle Lösungen für a kleiner als 100?

Bestimme die Nullstellen zu $M(a) = 2a \cdot \sqrt{50^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

<u>5. Stunde:</u> Rückschau und Klassifizierung

Am Ende der kleinen Unterrichtseinheit sollte eine Rückschau erfolgen. Hier bietet sich die Erstellung eines Posters oder einer Mindmap an. Der Anfang einer Mindmap könnte etwa wie folgt aussehen:



Für die Erstellung eignet sich eine Gruppenarbeit.

7.2.1.4 Weitere Aufgabenbeispiele

Streichholzschachtel

Die Kanten einer Streichholzschachtel mit den Kantenlängen 1 cm, 3,5 cm und 5 cm sollen zur Verdopplung des Volumens alle um das gleiche Maß verlängert werden.

Viele Wege führen zu einer Lösung

Löse die Gleichung $x^2 + 3x - 5 = 0$ auf möglichst viele Arten. Diskutiere Vor- und Nachteile der einzelnen Lösungsverfahren.

Systeme höherer Ordnung

Löse die folgenden Gleichungssysteme:

$$a)\ y - x^2 - 1 = 0 \ \text{ und } \ 2y + x^2 - 4 = 0 \qquad b)\ y - \frac{1}{2}x^3 = 3 \ \text{ und } \ y - x^2 = 2$$

Zylinder in der Kugel

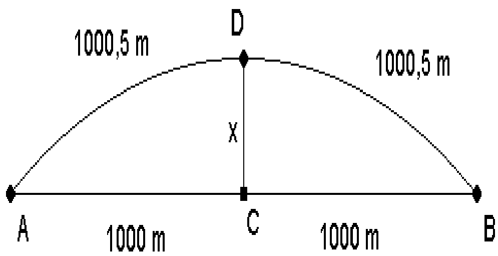
In eine Kugel mit dem Radius 10 cm soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Volumen halb so groß ist wie das der Kugel.

Lineares und exponentielles Wachstum (Mathematik heute 10, Schroedel 1993, S. 86)

Ein Baggersee von 1200 m² Größe wächst jede Woche um 700 m². Eine Algenart bedeckt zu Beginn der Baggerarbeiten 1 m² Wasserfläche. Die mit Algen bedeckte Fläche verdreifacht sich jede Woche. Nach wie vielen Wochen ist die ganze Wasserfläche mit Algen bedeckt?

Wölbung einer Brücke *(Humenberger 2002)*

Eine schwierige, aber sehr interessante Aufgabe, die das Bogenmaß und den Sinus erfordert:



Eine 2 km lange Brücke sei an den beiden Enden unbeweglich „festgemacht“. Bei einem Temperaturzuwachs von etwas mehr als 40° C dehnt sich jeder Meter um ca. 0,5 mm (die ganze Brücke also um ca. 1 m), und die Brücke wird dadurch nach „oben gekrümmt“. Um wie viel wird dabei der höchste Punkt D gehoben?

<u>Hinweis zur Lösung</u>

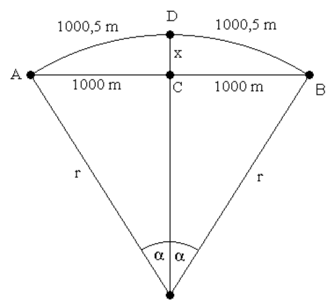
Diese Aufgabenstellung ist nicht realistisch, aber sie zeigt, „wie Mathematik prinzipiell zur Beschreibung von Situationen bzw. zur Lösung von konkreten Problemen angewendet werden kann, und welche katastrophale Folge es hätte, die einzelnen Brückenteile zu kilometerlangen Stücken ‚zusammenzuschweißen', d. h. keine Dehnungsfugen zu lassen“ *(Humenberger 2002, S. 239).*

Modell 1: Streckenzug ADB

Mit dem Lehrsatz des Pythagoras folgt der 1. Näherungswert: $x \approx 31{,}6\ \text{m}$. Der wirkliche Wert muss kleiner sein (warum?).

Modell 2: Kreisbogen ADB

Der Bogen ADB wird durch einen Kreisbogen ersetzt, und daraus wird x berechnet.



Ein Flächenproblem

Bei einem Rechteck ist die eine Seite um 3 cm größer als die andere. Welche Abmessungen hat das Rechteck, falls für den Flächeninhalt A gilt: A = 418 cm^2.

Bayes und die Millionäre

Etwa 1% der Menschen sind Millionäre. Von ihnen fahren 80% einen Wagen der gehobenen Klasse. Vom übrigen Volk fahren etwa 10% einen solchen Wagen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wagen der gehobenen Klasse, der mir begegnet, zufällig ein Millionär sitzt?
Was hat das mit Gleichungslösen zu tun?
Hier eine mögliche Antwort: Wie groß muss der Prozentsatz der Millionäre in der Bevölkerung sein, damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit auf 50% steigt?

Suchen von Gleichungen

Gegeben ist ein kleiner Teil einer Gleichung: $x^3 + \ldots = 0$. Finde möglichst viele Gleichungen, die $x = 0$ als Lösung haben.

Öffnen von Aufgaben

- Löse mit einem beliebigen Verfahren $5x^2 + 4x = 1$.
- Finde möglichst viele Gleichungen, die 1 und -2 als Lösungen haben.

Gläser klingen

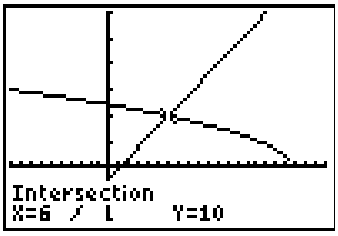
Auf einer Feier stoßen alle Gäste miteinander an. Wie viele Personen sind es, wenn nacheinander angestoßen wird und ein aufmerksamer Gast 28 Klänge zählt?

Wurzelgleichung[18]

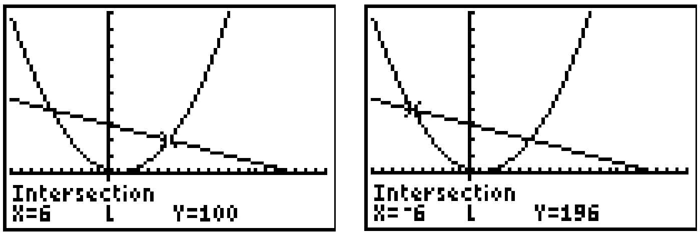
Initialaufgabe: Löse die Gleichung $2 + \sqrt{148 - 8x} = 2x$.
Diese Aufgabe kann vielfältig durch die Lerngruppe variiert werden. *Schupp* hat Strategien für das selbstständige Variieren dokumentiert.
Mögliche Strategien: umkehren, analogisieren, geringfügig ändern, vertauschen, Bedingungen ändern, kombinieren, Kontext wechseln.
Statt die Aufgabe zu lösen, kann man auch „umgekehrt“ vorgehen und die Schülerinnen und Schüler mögliche Lösungswege finden und beurteilen lassen.
Hier sind zwei Lösungen dokumentiert. Finde jeweils den Lösungsweg. Die Lösungen unterscheiden sich. Welche Lösung ist richtig? Begründe!

[18] siehe *Schupp* 2002, 224 ff

Lösung: $x = 6$



Lösung: $x = -6$ oder $x = 6$



7.2.1.5 Lösen von Gleichungen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

Ein Tabellenkalkulationsprogramm (TKP) kann beim Lösen von Gleichungen sinnvoll eingesetzt werden. Neben den vielfältigen grafischen Möglichkeiten bietet sich hier sehr eindrucksvoll das Arbeiten mit einer sich „aufspreizenden“ Tabelle an. Das Tabellenkalkulationsprogramm Excel ermöglicht das Lösen durch *Zielwertsuche*[19].

Beispiel: Löse die Gleichung $x^3 + x + 1 = 0$.

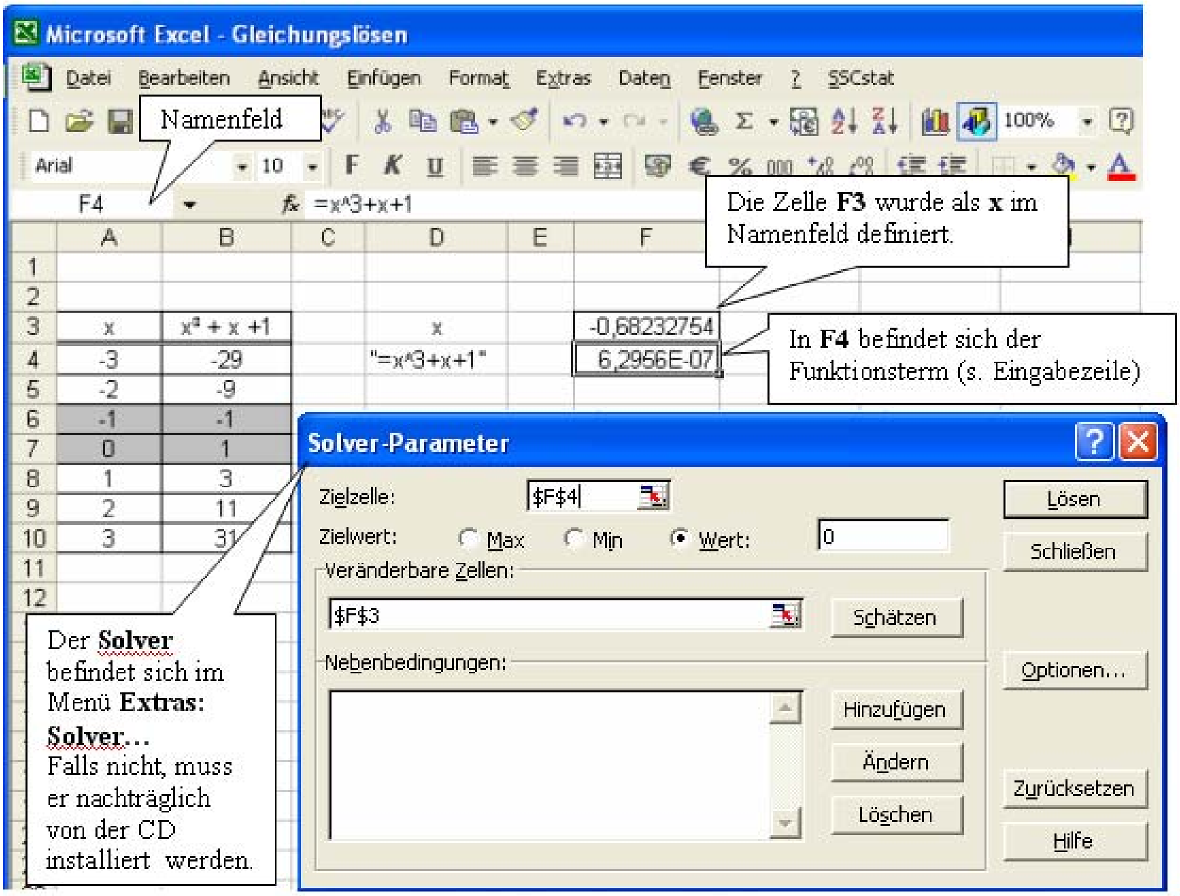
x	x³ + x +1
-3	-29
-2	-9
-1	-1
0	1
1	3
2	11
3	31

x	x³ + x +1
-1	-1
-0,9	-0,629
-0,8	-0,312
-0,7	-0,043
-0,6	0,184
-0,5	0,375
-0,4	0,536

x	x³ + x +1
-0,7	-0,043
-0,69	-0,018509
-0,68	0,005568
-0,67	0,029237
-0,66	0,052504
-0,65	0,075375
-0,64	0,097856

[19] Die Zielwertsuche geschieht mit dem so genannten SOLVER-Befehl, der im Menü *Extras* zu finden ist. Falls diese Funktion nicht vorhanden ist, muss der Solver nachträglich von der Office-CD installiert werden.

Zielwertsuche mit Excel - der *SOLVER*-Befehl



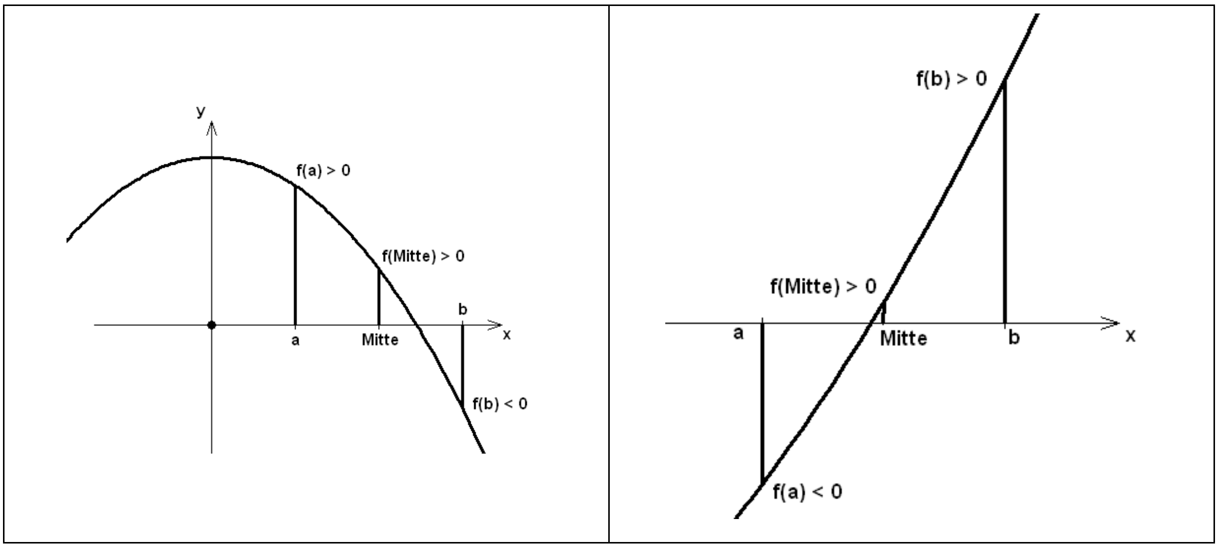
Der Einsatz einer Tabellenkalkulation ist auch dann sinnvoll, wenn im Unterricht der Zugang zu einfachen iterativen Verfahren erschlossen werden soll, aus der Black-Box „*Solver*“ wird somit eine „White-Box“[20]. Hier eignet sich das Intervall-Halbierungsverfahren in besonderer Weise, da

- die Konvergenz mäßig, aber kontrollierbar ist
- eine einfache Struktur vorliegt und das Verfahren für eine große Klasse von Funktionen geeignet ist (nur Stetigkeit vorausgesetzt)
- wenig Rechenaufwand erforderlich ist (sinnvoller Einsatz eines TKP).

[20] Die Zielwertsuche in Excel benutzt komplexe Algorithmen, mit denen eine größere Klasse von Gleichungen gelöst werden kann. Mit dem Halbierungsverfahren können z. B. keine doppelten Nullstellen erkannt werden. Das Aufzeigen von Grenzen sowie ein Vergleich der beiden Verfahren sind sehr reizvoll und weittragend.

Ein wenig Theorie

Der Algorithmus wird aus den beiden folgenden Abbildungen schon ersichtlich:



1. Die Funktion f hat an den Randstellen a und b Funktionswerte f(a) und f(b) mit verschiedenen Vorzeichen.
2. Bestimmt man das Vorzeichen von f(Mitte) in der Mitte des Intervalls, so kann man eine Nullstelle in einem Intervall der halben Länge einschließen.
3. Wiederhole Punkt 2.

Daraus erwächst die folgende Vorschrift:

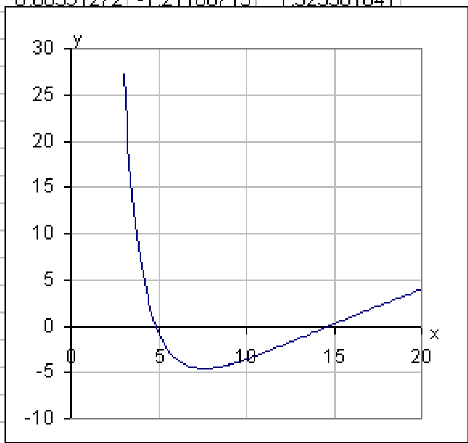
Wenn $f(a) \cdot f(\text{Mitte}) < 0$ ist

dann wird	a_neu = a	sonst	a_neu = Mitte	gewählt
dann wird	b_neu = Mitte	sonst	b_neu = b	gewählt.

Eine Umsetzung in Excel könnte so aussehen

B12 fx =WENN(E11*G11<0;B11;D11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Nullstellenbestimmung mit Hilfe des Halbierungsverfahrens								
3										
4		**f(x)=700 / x ^ 2 - 623.7 / (4 * x) + x / 2**								
5	Funktion ändern mit Alt F11									
6					Solver	x	4,856682106			
7	a	3				y	-6,28376E-09			
8	b	20								
9										
10	n	a_n	b_n	Mitte	f(a_n)	f(b_n)	f(Mitte)		x	f(x)
11	0	3	20	11,5	27,3027778	3,95375	-2,515689981		3	27,303
12	1	3	11,5	7,25	27,3027778	-2,51568998	-4,56441736		3,17	22,057
13	2	3	7,25	5,125	27,3027778	-4,56441736	-1,211087151		3,34	17,735
14	3	3	5,125	4,0625	27,3027778	-1,21108715	6,063912722		3,51	14,15
15	4	4,0625	5,125	4,59375	6,06391272	-1,21108715	1,525381641		3,68	11,159
16	5	4,59375	5,125	4,859375					3,85	8,6505
17	6	4,59375	4,859375	4,7265625					4,02	6,5384
18	7	4,7265625	4,859375	4,79296875					4,19	4,7536
19	8	4,79296875	4,859375	4,82617188					4,36	3,2409
20	9	4,826171875	4,859375	4,84277344					4,53	1,956
21	10	4,842773438	4,859375	4,85107422					4,7	0,863
22	11	4,851074219	4,859375	4,85522461					4,87	-0,068
23	12	4,855224609	4,859375	4,8572998					5,04	-0,86
24	13	4,855224609	4,857299805	4,85626221					5,21	-1,535
25	14	4,856262207	4,857299805	4,85678101					5,38	-2,108
26	15	4,856262207	4,856781006	4,85652161					5,55	-2,594
27	16	4,856521606	4,856781006	4,85665131					5,72	-3,005
28	17	4,856651306	4,856781006	4,85671616					5,89	-3,35
29	18	4,856651306	4,856716156	4,85668373					6,06	-3,639
30	19	4,856651306	4,856683731	4,85666752					6,23	-3,878
31	20	4,856667519	4,856683731	4,85667562					6,4	-4,073
32	21	4,856675625	4,856683731	4,85667968	3,3116E-05	-8,3109E-06	1,24027E-05		6,57	-4,231



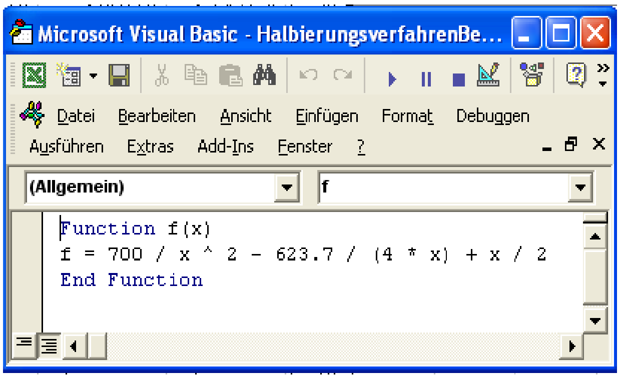
Erläuterungen zu den Formeln:

Zelle B12: = *WENN(E11*G11<0; B11; D11)*

Zelle C12: = *WENN(E11*G11<0;D11;C11)*

Danach werden die Zelleninhalte von B12 und C12 „nach unten kopiert“. Die Inhalte der restlichen Zellen sind selbst erklärend.

Eine komfortable Funktionstermeingabe erhält man durch die Deklaration einer Funktion. Mit dem Tastenbefehl Alt F11 gelangt man zum nebenstehenden Fenster und kann den Funktionsterm eingeben bzw. verändern.



Nun kann experimentiert werden. Die Veränderungen können übersichtlich anhand der Tabelle und mithilfe der Grafik untersucht werden.

7.2.1.6 Literatur

[1] *Humenberger, H.*: Wölbung einer Brücke - verschiedene Modelle. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker Verlag, Hildesheim 2002.

[2] *Schupp, H.*: Thema mit Variationen. Franzbecker Verlag, Hildesheim 2002.

7.2.1.7 Kontakt

Reimund Vehling	*r.vehling@t-online.de*
Hans Kramer	*hkramer01@aol.com*
Stefan Luislampe	*rade.luislampe@t-online.de*
Friedrich Suhr	*friedrich.suhr@t-online.de*

7.2.2 Quadratische Gleichungen, symbolische Lösung

Durch den Einsatz von GTR oder sogar CAS geht die praktische Bedeutung des symbolischen Lösens von Gleichungen zurück. Entsprechend wird man mehr Zeit für das Erstellen von Gleichungen (also die von vielen Schülerinnen und Schülern als besonders schwierig empfundenen „Ansätze“) und die Interpretation der Lösungen („sinnvolle Lösung des Problems“?) verwenden (können und müssen). Trotzdem ist klar, dass jedenfalls mittelfristig die Fähigkeit etwa zur Lösung einer einfachen quadratischen Gleichung „von Hand“ nicht nur zu fordern ist, sondern eben auch vermittelt werden muss. Hinsichtlich der aufgewandten Unterrichtszeit und des als unabdingbar gehaltenen „Niveaus“ sollte allerdings ehrlich eingestanden werden, dass auch in den vergangenen Jahren (noch ganz ohne GTR und CAS) selbst wochenlange intensive Übungsblöcke (leider) durchaus nicht alle Schülerinnen und Schüler befähigt haben, etwa in Klasse 11 oder 12 quadratische Gleichungen sicher lösen zu können. Insofern erscheint es legitim, sich bei der Entwicklung der symbolischen Lösungskompetenz auf ein relativ niedriges Niveau zu beschränken und dieses dann durch ganz bewusst geplante, „ständige“ Wiederholung zu sichern.	
besondere Materialien/Technologie: • GTR	**Dauer der Unterrichtssequenz:** • 6 Unterrichtsstunden

Gliederung

7.2.2.1	*Hinweise zu den Stunden sowie den Arbeitsblättern*	*225*
7.2.2.2	*Arbeitsblätter*	*228*
7.2.2.3	*Literatur*	*235*
7.2.2.4	*Kontakt*	*235*

Übersicht über die Unterrichtssequenz

Orientierung im „Feld der Gleichungen“	(1. Stunde, Arbeitsblatt 1)
Im Fokus: Faktorisieren	(2. Stunde, Arbeitsblatt 2)
Rund um quadratische Gleichungen	(3.- 5. Stunde, Arbeitsblatt 3)
Rückblick, Reflexion	(6. Stunde)

7.2.2.1 Hinweise zu den Stunden sowie den Arbeitsblättern

Hinweise zur 1. Stunde (und zum Arbeitsblatt 1)

Die im Kopf des Arbeitsblattes notierten Fragestellungen zeigen die Intentionen.
Es geht unter dem Aspekt der Vernetzung zunächst um die Assoziation des zur Gleichung gehörenden Problemkontextes mit der Gleichung selbst, ggf. auch um die Restrukturierung des schon vorhandenen Wissens aus verschiedenen Bausteinen unter dem Aspekt „Gleichungen“.

Die Vielfältigkeit der Gleichungstypen regt zur Klassifikation der Gleichungen unter verschiedenen Gesichtspunkten an (Problemkontext, äußere Struktur, Lösungsverfahren, Anzahl der Lösungen, ...).

Grafische und tabellarische Lösungsverfahren (Interpretation von rechter und linker Seite als Funktionsterm) sind aus verschiedenen Bausteinen (z. B. 3.2.7 und 3.2.9) vertraut; symbolisches Lösen ist zumindest für lineare Gleichungen (Baustein 3.2.9) bekannt, möglicherweise auch schon auf Gleichungen anderen Typs erweitert worden (z. B. im Baustein 3.3.4 für Parabeln). Entsprechend der Positionierung dieses Bausteins und der Voraussetzungen der Lerngruppe ist eine Anpassung der Gleichungstypen erforderlich. Wir schlagen vor, dieses Blatt zunächst in Kleingruppen bearbeiten zu lassen und anschließend an der Tafel zu „sammeln“. Es ist durchaus nicht erforderlich, dabei alle aufgeworfenen Fragen abschließend zu klären.

Das Arbeitsblatt soll in der 6. Stunde erneut eingesetzt werden, um Lernfortschritte bewusst zu machen.

Hinweise zur 2. Stunde (und zum Arbeitsblatt 2)

Im Zentrum steht die „Methode" der Faktorisierung. Wichtig ist:
Weil ein Produkt genau dann Null ist, wenn (mindestens) ein Faktor Null ist, sind Gleichungen des Typs

$$T_1(x) \cdot T_2(x) = 0$$

häufig leicht lösbar. Sie müssen also erkannt werden.
Es muss auch erkannt werden, wann und wie eine Gleichung in diese Form gebracht werden kann bzw. dass mit dieser Methode leicht Gleichungen (Funktionen!) mit bestimmten vorgegebenen Eigenschaften erzeugt werden können.

Wir haben einige Aufgaben zusammengestellt (Arbeitsblatt 2), wobei Umfang und Auswahl natürlich von der Fachlehrkraft bestimmt werden.

Hinweise zur 3. - 5. Stunde (und zum Arbeitsblatt 3)

Die im Arbeitsblatt 3 zusammengestellten Aufgaben sind ebenfalls als „Vorrat" zu verstehen und müssen sicher nicht von allen Schülerinnen und Schülern vollständig im Unterricht bearbeitet werden. Sie sind in drei Gruppen unterteilt; aus jeder Gruppe sollte jede Schülerin bzw. jeder Schüler wenigstens eine Aufgabe bearbeiten:

Aufgaben (1), 2-3:	(Einstieg), Lösungsverfahren
Aufgaben 4-7:	Vergleich verschiedener Darstellungen, Zusammenhang mit quadratischen Funktionen
Aufgabe 8-11:	„Specials", darunter auch „Textproduktion".

Zum Teil haben wir zwei Versionen formuliert, um eine mögliche Differenzierung (Auswahl durch die Schüler/innen möglich) zu unterstützen.
Wenn man „Stationen" einrichtet, könnten die Schülerinnen und Schüler in zwei Stunden selbst wählen, welche Aufgaben sie bearbeiten wollen. Wichtig erscheint die Kommunikation zwischen ihnen in den aufgabenbezogenen (Klein-)Gruppen. Als Hausaufgabe ist denkbar, jeweils die Lösung einer Aufgabe so auszuarbeiten, dass sie (z. B. für eine fehlende Schülerin/einen fehlenden Schüler) verständlich ist. Diese Ausarbeitungen könnten die Grundlage für die „Ergebnissicherung" (5. Stunde) bilden. Welche Aufgaben dann tatsächlich von den Schülerinnen und Schülern präsentiert und im Plenum besprochen werden, hängt natürlich von der Lerngruppe ab.

Hinweis zur 6. Stunde

Die Stunde dient der Reflexion. Wenn hierzu wieder Arbeitsblatt 1 verwendet wird, können Lernfortschritte transparent gemacht werden. Im Sinne einer Differenzierung „auch für die Spitzen“ können ggf. weitere Aufgaben ergänzt werden. Wichtig erscheint uns, dass die symbolische Lösbarkeit von Gleichungen als eine Besonderheit klar wird, die auf wenige spezielle Fälle beschränkt ist.

Was fällt eigentlich alles weg?

Die früher ausführlich behandelten biquadratische Gleichungen, Bruch- und Wurzelgleichungen, „die auf quadratische Gleichungen führen“, werden kaum noch behandelt.

7.2.2.2 Arbeitsblätter

Arbeitsblatt 1

„Gleichungen“, anspruchsvollere Version

1. Welche Gleichungen erkennst du wieder? In welchem Zusammenhang traten sie auf?
2. Welche Gleichungen gehören zusammen? Sortiere sie in Gruppen!
3. Welche Gleichungen kannst du lösen? Wie?
4. Welches sind (für dich) die 3 schwersten, welches die 3 leichtesten Gleichungen?

$x(x-2)=0$	$-2(x-3)^2+18=0$
$\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$	$m\cdot(-4)+7=5$
$x^2+2x-3=0$	$x^3+2x^2-3x=0$
$x^2+px+q=0$	$2^x=2x$
$ax^2+bx+c=0$	$x^2=-2x+3$
$a(x-x_s)^2+y_s=0$	$-4\cdot\sin(2t)=3$
$\sqrt{\sin^2(x)+\cos^2(x)}=1$	$\frac{1}{x}=2x+1$
$(x+1)(x+3)(x-1)=5(x+1)$	$z^4+2z^2-3=0$
$K_0\cdot 1{,}03^x=2\cdot K_0$	$\frac{p_0\cdot a^{2000}}{p_0\cdot a^{1500}}=\frac{790}{980}$
$\log_2(x+1)=3$	$2^x=8$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{(-x)}=-8$	$\sin(x)=x$
$\frac{x}{2}-7=-5$	$(x-1)\cdot 3^x=0$

Arbeitsblatt 1

„Gleichungen“, einfachere Version

1. Welche Gleichungen gehören zusammen? Sortiere sie in Gruppen!
2. Welche Gleichungen kannst du lösen? Wie?
3. Welches sind (für dich) die 3 schwersten, welches die 3 leichtesten Gleichungen?

$x(x-2)=0$	$-2(x-3)^2+18=0$
$x^2-6x+9=0$	$x^2-6x+5=0$
$3x^2-6x=-3$	$\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$
$m\cdot(-4)+7=5$	$x^2+2x-3=0$
$x^3+2x^2-3x=0$	$1+\frac{2}{x}=-\frac{1}{x^2}$
$x^2+px+q=0$	$x^3-3x^2=0$
$ax^2+bx+c=0$	$x^2=-2x+3$
$a(x-x_s)^2+y_s=0$	$\frac{1}{x}=2x+1$
$(x+1)(x+3)(x-1)=5(x+1)$	$z^4+2z^2-3=0$
$\frac{x}{2}-7=-5$	$(x-1)\cdot 3^x=0$
$x^2-16=0$	$x^4=4x^2$

<u>Arbeitsblatt 2</u>

Im Fokus: Die Faktorisierung

Welche der folgenden Aufgaben sind leicht/schwer? Warum?
Löse nur die leichten Aufgaben.

$$x \cdot (x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 4) \cdot (x + 1) = 0$$

$$x + 2x^2 = 0$$

$$k^3 - 4k^2 = k^2$$

$$2 = (y - 1) \cdot (y + 3)$$

$$2^x \cdot x - 2^x \cdot 2x^2 = 0$$

$$2^x \cdot x - 2^x \cdot 2x^2 = 1$$

Notiere mindestens fünf weitere Gleichungen, die nicht faktorisiert sind, sich aber mit der Methode „Faktorisierung“ lösen lassen. Verstecke unter ihnen zusätzlich zwei weitere Gleichungen, die „aufs Glatteis führen“.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

Tausche das Blatt mit deinem Nachbarn und löse seine Aufgaben.

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1

Gesucht sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Für welche speziellen Werte von p und q kannst du die Lösungen „fast im Kopf“ bestimmen? Gib Werte für p und q an, damit $x = 2$ eine (oder die!) Lösung ist.

Aufgabe 2 (Version A)

Klaus hat zwei „Musterlösungen“ der quadratischen Gleichung $x^2 + 8x + 7 = 0$ verfasst und möchte sie seiner Klasse vorstellen. Welche Erläuterungen sollte er zu den einzelnen Umformungen geben? Gefällt dir die linke oder die rechte Spalte besser?

$x^2+8x+7=0$	$x^2+8x+7=0$
$x^2+8x+16-16+7=0$	$x^2+8x+16=9$
$(x+4)^2-16+7=0$	
$(x+4)^2-9=0$	
$(x+4)^2=9$	$(x+4)^2=9$
$x+4=3$ oder $x+4=-3$	$x+4=3$ oder $x+4=-3$
$x=-1$ oder $x=-7$	$x=-1$ oder $x=-7$

Wende das Verfahren zur Lösung der Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$ an.

Aufgabe 2 (Version B)

Die folgenden Zeilen einer „Musterlösung“ der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind leider arg durcheinander geraten. Bringe sie in die richtige Reihenfolge und erläutere, welche Umformung jeweils vorgenommen wurde.

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$

$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

$\boxed{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0}$

$\boxed{\left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

$\boxed{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$

Aufgabe 3 (Version A)

Versuche, ein schriftliches Verfahren für die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+6x+5=0$ zu finden.

Vielleicht hilft es dir, wenn du die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm auffasst und an die Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes einer Parabel denkst?

Aufgabe 3 (Version B)

Versuche, eine „allgemeine Lösungsformel“ für die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ zu finden.

Vielleicht hilft es dir, wenn du die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm auffasst und an die Bestimmung der Koordinaten des Scheitelpunktes einer Parabel denkst?

Aufgabe 4 (Version A)

Bestimme jeweils die Lösungsmenge. Welche Vor- und Nachteile haben die jeweiligen Darstellungen?

(a) $x^2+2x-3=0$ (b) $(x+3)(x-1)=0$

(c) $(x+1)^2-4=0$

Aufgabe 4 (Version B)

Welche Vor- und Nachteile haben die jeweiligen Darstellungen?

(a) $x^2+px+q=0$ (b) $(x-a)(x-b)=0$

(c) $(x-x_s)^2+y_s=0$

Was kannst du über die Lösbarkeit der Gleichungen sagen?

Aufgabe 5

Finde etwa 5 möglichst verschieden aussehende quadratische Gleichungen mit der Lösungsmenge L=$\{-4; 3\}$.

Finde etwa 3 weitere, nicht quadratische Gleichungen mit der Lösungsmenge L=$\{-4; 3\}$.

Aufgabe 6

Gib jeweils zwei verschiedene quadratische Gleichungen an, die

a) keine Lösung
b) genau eine Lösung
c) zwei Lösungen

haben. Vielleicht erkennst du einen „Trick“, wie man solche Gleichungen ziemlich leicht finden kann? Dann schreibe ihn für deine Mitschülerinnen und Mitschüler verständlich auf.

Aufgabe 7

Finde zwei nicht quadratische Funktionen, deren Schnittpunktberechung auf die quadratische Gleichung $x^2-4x-5=0$ führt.

Aufgabe 8

Als „Lösungsformel“ der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wird in einer Formelsammlung

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

angegeben. Versuche einen Programmablaufplan zu entwerfen, nach dem ein Computer/GTR vorgehen könnte, um eine solche quadratische Gleichung zu lösen.
Wenn du magst, kannst du darüber hinaus versuchen, ein solches Programm für deinen Rechner zu schreiben.

Aufgabe 9

Wie löst man eine quadratische Gleichung? Beschreibe ausführlich an einem von dir geeignet gewählten Beispiel, wie du beim Lösen einer quadratischen Gleichung „von Hand“ vorgehst.

Aufgabe 10

Klaus behauptet: „Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\text{ .“}$$

Klara entgegnet: „Das stimmt ja wohl nicht immer!“ Was meinst du dazu?

Aufgabe 11

Von drei verschiedenen quadratischen Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ ist jeweils eine besondere Eigenschaft bekannt:

Gleichung 1: Die Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.
Gleichung 2: Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen.
Gleichung 3: Genau eine der beiden Lösungen ist Null.

Was kannst du in diesen drei Fällen aufgrund der jeweils angegebenen Bedingung über die Koeffizienten p und q aussagen? Begründe stets deine Antwort.

Zusatz: Gibt es Gleichungen, die zwei oder sogar alle drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllen?

Zur besseren Orientierung sind zu einzelnen Aufgaben von Arbeitsblatt 3 noch die folgenden Hinweise gegeben:

Aufgabe 1

Mit „Parabeln im Hinterkopf“ werden die Schülerinnen und Schüler vielleicht konkrete Gleichungen mit nur einer oder auch keiner Lösung angeben und damit die Frage klären. Natürlich gibt es auch „formalere“ Zugänge.

Aufgabe 2

Version A und B können parallel angeboten werden (Auswahlmöglichkeit!). In Version B stehen die erste und letzte Zeile als Erleichterung noch richtig. Falls man die Kopie zerschneiden möchte, hat man ein „echtes Puzzle“.

Aufgabe 3

Version A und B können parallel angeboten werden (Auswahlmöglichkeit, Transfer von A nach B). Die Aufgabe knüpft an Vorkenntnisse aus dem Baustein „Rund um die Parabel“ an. In Version B ist die Lösbarkeit bei (b) klar, bei (a) und (c) dagegen „offen“.

Aufgabe 5

Diese divergente Aufgabe hat natürlich mehrere Lösungen. Als erster Lösungsansatz genügt bei a) vielleicht durchaus eine einzige Standardidee, hier etwa $(x+4)(x-3) = x^2 + x - 12 = 0$.

Offen bleibt, wie weitere quadratische Gleichungen mit derselben Lösungsmenge „produziert“ werden. Man könnte z. B. grafisch orientiert einen Faktor a hinzufügen oder auf beiden Seiten gleiche (höchstens quadratische) Terme addieren, die Scheitelpunktsform verwenden, ...
Bei b) muss klar werden, dass wie bei a) die Addition (jetzt eben höherer) Terme möglich ist, aber z. B. auch die Multiplikation mit (schon vorhandenem!) Linearfaktor oder mit einem anderen Term (gedacht als „Funktion“), der keine weitere Nullstelle produziert, also z. B. vom Typ $\frac{1}{x}$, a^x oder ähnliches.

Aufgabe 6

Faktoransatz oder Ansatz über Scheitelpunktsform sind vielversprechend uns als Klausuraufgabe vorstellbar. Die (wünschenswerte) „Textproduktion“ kann als Differenzierung dienen.

Aufgabe 7

Assoziation von Nullstellenberechnung und Schnittstellenberechnung, ansonsten ähnlich wie Aufgabe 5.

Aufgabe 8

Die Erstellung des Programmablaufplan verlangt Strukturierung und die Fallunterscheidung nach Anzahl der Lösungen (mit Kriterium!).

Die eigentliche Programmierung ist bewusst als Zusatz für „Experten“ offen gelassen.

Eine Möglichkeit mit dem TI-83 wäre z. B.:

```
PROGRAM:QUADGL
:ClrHome
:Disp "GIB P UND Q DER"
:Disp "QUADRATISCHEN"
:Disp "GLEICHUNG AN :"
:
:Prompt P
:Prompt Q
:
:(P/2)²-Q→R
:
:If R<Ø:Then
:Disp "KEINE LOESUNG"
:
:Else
:If R=Ø:Then
:Disp "X= ",⁻(P/2)
:
:Else
:Disp "X1 ="
:Disp ⁻(P/2)-√((P/2)²-Q)
:Disp "X2 ="
:Disp ⁻(P/2)+√((P/2)²-Q)
:End
```

7.2.2.3 Literatur

[1] *Körner, H.:* Neue Bildungsziele durch den Computer. In: Wie viel Termumformung braucht der Mensch? Franzbecker-proceedings, 1993, S. 18-23.

[2] *Profke, L.:* Quadratische Gleichungen - eine Unterrichtsvorbereitung. In: Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Franzbecker-proceedings, 2000, S. 76-81.

[3] *Herget, W.:* Die andere Mathe-Aufgabe. Vortrag MNU-Tagung. Nürnberg 1995.

[4] *Herget, W.:* Die etwas andere Aufgabe. mathematik lehren 102, 2000, S. 58.

7.2.2.4 Kontakt

Wildmann, Markus — *wildmann@web.de*

Schläger, Susanne — *s.schlaeger@surfeu.de*

Hillmann, Ludger — *Ludgerhillmann@gmx.de*

Dönges, Christoph — *Christoph.Doenges@t-online.de*

7.2.3 Iteration zur Bestimmung von Nullstellen mit Vorzeichenwechsel

Diese Unterrichtseinheit führt ein in Iterationsverfahren, die in besonderer Weise geeignet sind, Nullstellen mit Vorzeichenwechsel zu bestimmen. Sie soll den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in die Arbeitsweise von Algorithmen geben, mit deren Hilfe sich Lösungen von Gleichungen bestimmen lassen.	
besondere Materialien/Technologie: je nach Vorgehensweise: • Tabellenkalkulation/Computerarbeitsplätze • PC mit Beamer/GTR	**Dauer der Unterrichtseinheit:** • 3 - 5 Unterrichtsstunden

Gliederung

7.2.3.1 Einführung *236*

7.2.3.2 Möglicher Unterrichtsverlauf (Minimalkatalog) *237*

7.2.3.3 Anlagen *243*

7.2.3.4 Literatur *245*

7.2.3.5 Kontakt *245*

7.2.3.1 Einführung

Bei unserer Einstiegsdiskussion ergaben sich für die Einführung der Iteration zwei mögliche Verfahren:

- rein numerisch mithilfe der Intervallhalbierungsmethode
- halb algebraisch mithilfe der Fixpunktiteration.

Beide Verfahren werden durch den Übergang in das Sekantenverfahren (Regula falsi) verfeinert, so dass den Schülerinnen und Schülern nach Abschluss der Unterrichtseinheit ein zuverlässiges und leistungsfähiges Verfahren zur iterativen Bestimmung der Vorzeichenwechselstellen zur Verfügung steht.

Die im Nachfolgenden beschriebene Unterrichtseinheit verfolgt die rein numerische Methode.

Vorweg sollte noch gesagt werden, dass hier ganz bewusst nicht allgemein von *Nullstellen* gesprochen wird, da alle Iterationsmethoden bei Berührpunkten mit der x-Achse versagen und deshalb ein

Vorzeichenwechsel eine Voraussetzung darstellt. Deshalb könnte hier besser mit dem Begriff *Vorzeichenwechselstelle* gearbeitet werden.

Vorgesehen sind für diesen Weg 3 Unterrichtsstunden. Wir haben uns bei der Durchführung dieser Vorgehensweise für den Einsatz einer Tabellenkalkulation entschlossen, weil wir meinen, dass gerade bei diesem Thema die Tabellenkalkulation als sehr leistungsfähiges Werkzeug erkennbar wird. Wir beziehen uns dabei auf Microsoft Excel 2000; eine Übertragung auf andere Tabellenkalkulationen ist aber möglich.

7.2.3.2 Möglicher Unterrichtsverlauf (Minimalkatalog)

1. Stunde: Erzeugung von Tabelle und Graph mithilfe von Excel; Eingabe eines Funktionsterms. Fragestellung am Ende der Stunde: Wie findet man die Nullstellen bei einer Funktion?
Hinweis: Falls Vorkenntnisse zur Erzeugung von Wertetabellen und Funktionsgraphen mit der Tabellenkalkulation verfügbar sind, kann diese Stunde auch weggelassen werden.

2. Stunde: Händisch die Methode der Intervallhalbierung durchspielen und die notwendigen Spalten mit Einträgen in Tabelle überführen; Demonstration der Umsetzung unter Verwendung von Excel und der Hausaufgabe.

3. Stunde: Verfeinerung des Verfahrens durch die Erarbeitung der Methode des Sekantenverfahrens, welches in die Regula falsi mündet.

Medien: Für die Demonstration ist in allen drei Stunden ein Rechner mit Beamer erforderlich. Wenn es möglich ist (verfügbarer Rechnerraum bzw. Laptops), könnten die im Anhang verfügbaren Arbeitsblätter auch selbsttätig durch die Schülerinnen und Schüler bearbeitet werden.

1. Stunde: Erzeugung von Tabelle und Graph mithilfe einer Tabellenkalkulation

Tabellarische und grafische Untersuchung des Funktionsterms $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$.

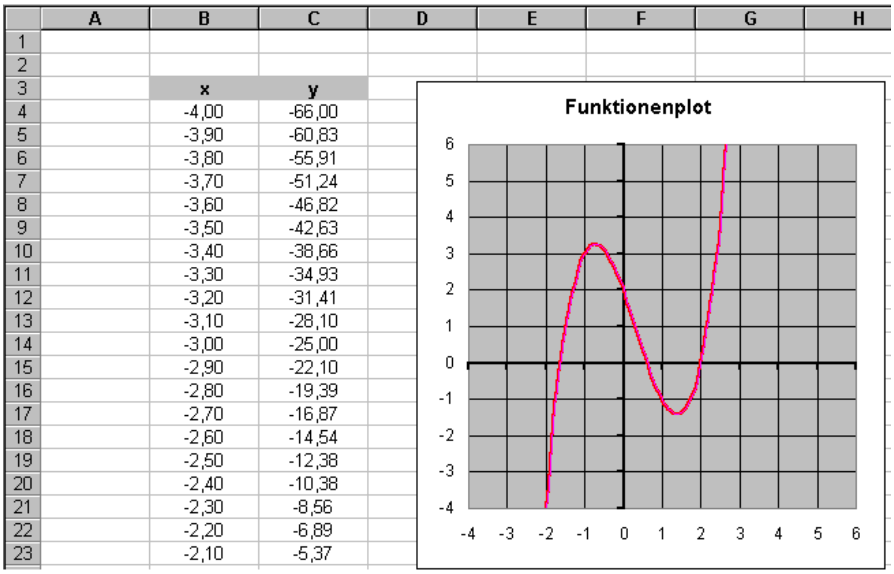
Wir haben uns für diese Funktion entschlossen, da es hier für die Vorzeichenwechselstellen sowohl eine ganzzahlige Lösung als auch zwei irrationale Lösungen gibt, so dass es zur Kontrolle auch möglich wäre, den Funktionsterm faktorisiert abzuarbeiten und dabei eine rein algebraische Lösung zur Kontrolle zu erzielen.

Die Zerlegung des Funktionsterms ist $f(x) = (x-2)\cdot(x^2 + x - 1)$, so dass sich hier die exakten Vorzeichenwechselstellen $x_{N1} = 2$; $x_{N2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $x_{N3} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ergeben.

Vorgehensweise

Auf dem Arbeitsblatt 1 (siehe 7.2.3.3) folgt eine detaillierte Beschreibung, wie mit Excel die tabellarische und grafische Untersuchung programmiert werden kann. Wenn es möglich ist, sollten die Schülerinnen und Schüler das Arbeitsblatt selbstständig bearbeiten, so dass der Lehrkraft die Rolle des Helfers zukommt.

Ein mögliches Ergebnis zeigt der nachfolgende Screenshot 1:



	A	B	C
1			
2			
3		x	y
4		-4,00	-66,00
5		-3,90	-60,83
6		-3,80	-55,91
7		-3,70	-51,24
8		-3,60	-46,82
9		-3,50	-42,63
10		-3,40	-38,66
11		-3,30	-34,93
12		-3,20	-31,41
13		-3,10	-28,10
14		-3,00	-25,00
15		-2,90	-22,10
16		-2,80	-19,39
17		-2,70	-16,87
18		-2,60	-14,54
19		-2,50	-12,38
20		-2,40	-10,38
21		-2,30	-8,56
22		-2,20	-6,89
23		-2,10	-5,37

Es ist ratsam, das Diagramm auf ein eigenes Diagrammblatt zu kopieren; Anweisungen dazu siehe auf dem Arbeitsblatt.

Als Hausaufgabe erhalten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag, das Programm noch einmal zu erstellen und damit einen Plot der Funktion $f(x)=\frac{8x}{x^2+1}$ zu erzeugen. Als Hilfe dient ihnen das Arbeitsblatt.

2. Stunde: Die Intervallhalbierungsmethode und ihre Umsetzung in Excel

Zu Beginn wird noch einmal der Funktionsgraph zu $f(x)=x^3-x^2-3x+2$ vorgelegt.

Am Graphen wird die Einstiegsfrage gestellt, wie die exakten Vorzeichenwechselstellen lauten. Eine Vorzeichenwechselstelle bei $x_{n1} = 2$ kann unproblematisch abgelesen und überprüft werden. Die anderen beiden Vorzeichenwechselstellen lassen sich jedoch nicht genau ermitteln.

Natürlich werden die Schülerinnen und Schüler sofort einwenden, dass sich diese Stellen mit den grafikfähigen Taschenrechnern genau bestimmen lassen. Hier wird es deshalb um die Frage gehen, wie dies die Taschenrechner machen könnten. Konkret wird gefragt, wie durch eine Abfolge von Anweisungen (Algorithmus) diese Aufgabe erledigt werden kann.

Bei der Suche nach einem möglichen Algorithmus werden sie von sich aus auf die Idee kommen, ein Intervall um die Vorzeichenwechselstelle zu legen, und dann durch mehr oder weniger systematisches Probieren über die Berechnung der Funktionswerte versuchen, die Vorzeichenwechselstelle so genau wie möglich zu ermitteln.

Um sie auf das Verfahren der Intervallhalbierung zu führen, kann mit ihnen eine kleines Gedankenexperiment durchgeführt werden: Ein/e Schüler/in (Spielleiter/in) denkt sich eine Zahl zwischen 0 und 99 aus und schreibt sie so auf den Zettel, dass sie von den anderen nicht gesehen wird. Es ist nun zu ermitteln, wie viele Fragen höchstens nötig sind, um diese Zahl zu erraten, wenn der/die Spielleiter/in nach jedem Rateversuch als Antwort nur *größer*, *kleiner* oder *richtig* rückmeldet.

Bereits hier könnte jetzt die Niederschrift der Zwischenergebnisse als Liste von Intervallen erfolgen.
Bevor jedoch an eine Umsetzung der Intervallhalbierungsmethode in ein Programm im Excelblatt gedacht wird, müssen die Schülerinnen und Schüler die benötigten Spalten für eine händische Bearbeitung der Intervallhalbierungsmethode erarbeiten (linke Grenze, Intervallmitte, rechte Grenze, Funktionswert an der linken Grenze, Funktionswert an der Intervallmitte, Funktionswert an der rechten Intervallgrenze).

Hier sollte auf eine vernünftige Begriffsbildung geachtet werden.
Auf diesen Angaben stützt sich die Festlegung der neuen Intervallgrenzen. Sie mündet in der elementaren Feststellung, die auch an der Tafel festgehalten werden sollte:

> *In jeder neuen Zeile wird entweder der linke oder der rechten Rand durch die Mitte ersetzt: Wenn die Funktionswerte über dem linken Rand und der Mitte gleiches Vorzeichen haben, dann wird der linke Rand ersetzt, sonst wird der rechte Rand ersetzt.*

Die Schülerinnen und Schüler sollen nun etwa drei Zeilen händisch erzeugen. Wir halten dies für unverzichtbar, damit das Verfahren von allen verstanden wird.
Anschließend erfolgt eine Umsetzung in ein Excelblatt. Dazu wird in der Exceldatei aus der vergangenen Stunde ein neues Blatt geöffnet und die händisch erzeugte Tabelle umgesetzt.
Bei der Umsetzung der Regel zur Ersetzung ist zu klären, wie man über Vorzeichengleichheit entscheidet. Hier wird der Satz formuliert:

Zwei Werte haben genau dann gleiches Vorzeichen, wenn ihr Produkt positiv ist.

Die Umsetzung der Entscheidungsregel in Excel ist aus dem Arbeitsblatt 2 zu ersehen: Die Struktur der „Wenn"-Anweisung ist: WENN(Bedingung; Dann - Anweisung; Sonst - Anweisung).

Eine ausführliche Anweisungsliste findet sich im Anhang (Arbeitsblatt 2). Es sollte auch noch Unerfahrene zum Ziel führen. Ein mögliches Ergebnis zeigt der nachfolgende Screenshot 2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4			**links**	**mitte**	**rechts**		**f(links)**	**f(mitte)**	**f(rechts)**	**0,618033988**
5			0,00000	0,50000	1,00000		2,00000	0,37500	-1,00000	
6			0,50000	0,75000	1,00000		0,37500	-0,39063	-1,00000	
7			0,50000	0,62500	0,75000		0,37500	-0,02148	-0,39063	
8			0,50000	0,56250	0,62500		0,37500	0,17407	-0,02148	
9			0,56250	0,59375	0,62500		0,17407	0,07553	-0,02148	
10			0,59375	0,60938	0,62500		0,07553	0,02682	-0,02148	
11			0,60938	0,61719	0,62500		0,02682	0,00262	-0,02148	
12			0,61719	0,62109	0,62500		0,00262	-0,00945	-0,02148	
13			0,61719	0,61914	0,62109		0,00262	-0,00342	-0,00945	
14			0,61719	0,61816	0,61914		0,00262	-0,00040	-0,00342	
15			0,61719	0,61768	0,61816		0,00262	0,00111	-0,00040	
16			0,61768	0,61792	0,61816		0,00111	0,00035	-0,00040	
17			0,61792	0,61804	0,61816		0,00035	-0,00002	-0,00040	
18			0,61792	0,61798	0,61804		0,00035	0,00016	-0,00002	
19			0,61798	0,61801	0,61804		0,00016	0,00007	-0,00002	
20			0,61801	0,61803	0,61804		0,00007	0,00002	-0,00002	

Es zeigt sich, dass die unteren Werte stabil sind und in den drei Spalten *links*, *Mitte* und *rechts* übereinstimmen. Den ermittelten Wert kann man sich auch genauer anzeigen lassen. Dafür benötigt man eine breitere Spalte. Für das Feld J4 ist über die rechte Maustaste das Zahlenformat „Zahl, 9 Nachkommastellen" eingestellt. Der hier angezeigte Wert ist identisch mit dem, den die Taschenrechner liefern.

Sollte noch Zeit vorhanden sein, könnte die noch fehlende Nullstelle ebenfalls bestimmt werden. Auch könnte den Schülerinnen und Schülern die Zerlegung des Funktionsterms gegeben werden. Eine anschließende Überprüfung durch sie (Ausmultiplizieren) zeigt, dass die gegebene Zerlegung richtig ist, so dass sie in diesem Fall mithilfe der Lösungsmethode für die quadratischen Gleichungen die exakten Vorzeichenwechselstellen algebraisch ermitteln können.

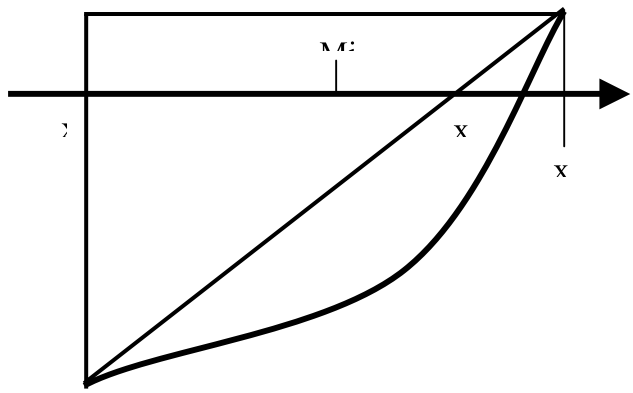
<u>3. Stunde</u>: Das Sekantenverfahren (Regula falsi)

Wählt man bei der Intervallhalbierungsmethode die Grenzen so, dass die Vorzeichenwechselstelle (kurz: VZWS) in der Mitte liegt, so folgt für das nächste halbierte Intervall, dass die VZWS sich nun in der Nähe eines Randes befindet. Dieser Abstand verkleinert sich erst dann wieder, wenn auch der andere Rand so klein bzw. so groß geworden ist, dass die VZWS erneut in etwa in der Mitte des verbleibenden Intervalls liegt. Anschließend wiederholt sich jedoch dieser Ablauf.

Dies sollte den Schülerinnen und Schülern noch einmal an einer Skizze verdeutlicht werden. Dabei muss problematisiert werden, dass von den Funktionswerten bislang nur ihre Vorzeichen ausgewertet wurden, eigentlich aber mit den Funktionswerten mehr Information zur Verfügung steht.

In Kleingruppenarbeit sollen sie nun herausfinden, wie das Verfahren durch die Auswertung der Funktionswerte optimiert werden kann. Dabei werden sie bei geeigneter Skizze sicherlich auf die Sekante und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse kommen, der deutlich näher als die Intervallhälfte an der VZWS liegt.

Es bleibt nun zu ergründen, wie dieser Schnittpunkt gefunden werden kann. Eine Möglichkeit wäre es, die Funktionsgleichung der Sekante aufzustellen und diese mit der x-Achse zu schneiden. Viel eleganter ist es jedoch, mithilfe des Ähnlichkeitssatzes an einer geeigneten Zeichnung (siehe Skizze) nach einer Lösung zu suchen, die dann recht schnell gefunden werden kann. Für die neue Intervallgrenze gilt nämlich:



$$\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} = \frac{x_{n+1} - x_n}{0 - f(x_n)},$$

woraus durch Umformen die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

für dieses Verfahren entsteht. Das Aufstellen der Proportionalitäten und die Umformung nach x_{n+1} sollte den Schülerinnen und Schülern gelingen.

Bei der Eintragung in das Tabellenblatt kommt man mit zwei Spalten für x und f(x) aus, wobei nach der Kopfzeile zunächst die ersten beiden Zeilen mit den Anfangswerten gefüllt werden und in der dritten Zeile dann in der x-Zelle die Formel zu erstellen ist. Auch dies sollten die Schülerinnen und Schüler eigenständig leisten können, so dass diese Aufgabe auch als Hausaufgabe gestellt werden könnte.

Die Genauigkeit des Ergebnisses (Übereinstimmung mit dem exakten Wert auf 12 Dezimalen) überzeugt insbesondere in Verbindung mit der niedrigen Zahl der hinführenden Schritte.

Ein mögliches <u>Ergebnis</u> zeigt der Screenshot 3:

	A	B	C	D
1				
2		**11**	**0,618033988750**	
3		**Nr.**	**x_n**	**$f(x_n)$**
4		**1**	**0**	2,00
5		**2**	**5**	87,00
6		**3**	-0,117647058824	2,337472013027
7		**4**	-0,258941644008	2,692411919110
8		**5**	0,812854507213	-0,562216621575
9		**6**	0,627708459477	-0,029814913176
10		**7**	0,617340135614	0,002144534965
11		**8**	0,618035868311	-0,000005808160
12		**9**	0,618033989110	-0,000000001113
13		**10**	0,618033988750	0,000000000000
14		**11**	0,618033988750	0,000000000000

Formeln

7.2.3.3 Anlagen

<u>**Arbeitsblatt 1**</u>

Funktionenplotter

Nach dem Aufruf von Excel befindet man sich auf dem Tabellenblatt „Tabelle1“:

<u>(1) Eingabe des Funktionsterms</u>

```
Function f(x)
f = x^3 - x^2 - 3*x + 2  .
End Function
```

- Die Tastenkombination ALT-F11 ruft den Visual Basic Editor auf.
- Der Menüpunkt „Einfügen - Modul“ legt ein leeres Blatt an. Hier wird die Funktion deklariert mit:
  „In der Zuweisungszeile steht der bloße Funktionsname ohne die Variabelenkennung“.
- Mit ALT-F11 kehrt man in das Tabellenblatt zurück.

<u>(2) Anlegen einer Wertetabelle</u>

- Eingabe der Spaltenköpfe: „x“ in B3, „y“ in C3. (Der Text erscheint linksbündig.)
- Eingabe des Startwerts in Zelle B4: „-4“. (Der Zahlwert erscheint rechtsbündig.)
- Eingabe der Formel für den Funktionswert in Zelle C4: „= f(B4)“.
- Eingabe der Formel für die Berechnung der nächsten Stelle in B5:„= B4 + 0,1“.
- Kopieren der Formel in B5 nach unten bis Zelle B104 durch Ziehen mit der Maus am Kästchen der unteren rechten Ecke des Feldes B5.
- Kopieren der Formel in C4 nach unten parallel dazu.
- Formatierung der Zellen:
  Markieren des Bereichs B4-C104 mit gedrückter Maustaste. Die rechte(!) Maustaste öffnet ein so genanntes Pulldownmenu mit dem Punkt „Zellen formatieren“. Im Unterpunkt „Zahlen-Zahl“ kann man die Anzahl der Nachkommastellen festlegen.

<u>(3) Anlegen einer Wertetabelle</u>

- Aufruf des Diagrammassistenten aus der Standardsymbolleiste mit „Einfügen - Diagramm“, Auswahl des Standardtyps „Punkt (XY)“, Art 3: Punkte mit interpolierten Linien ohne Datenpunkte.
- Die Formatierung des Diagramms erfolgt durch Anwählen eines Objekts (x-Achse, Diagrammfläche o. ä.) und Aufruf des Formatierungsmenus mit der rechten Maustaste. Insbesondere muss die Skalierung der Achsen geeignet festgelegt werden.

<u>(4) Kopie des Diagramms auf ein eigenes Diagrammblatt</u>

- Erzeugen einer Kopie nach Anklicken des Diagramms mit der Tastenkombination CTRL-C, Anwahl eines Feldes und Einfügen des Diagramms mit CTRL-V.
- Anwahl der Kopie, Ansteuern des Menupunkts „Platzieren“ (über die rechte Maustaste), Wahl der Option „Als neues Blatt“.

Arbeitsblatt 2

Nullstellenbestimmung mit Intervallhalbierung

Wechsel in Tabellenblatt 2 derselben Mappe:

- Eintragen der Spaltenköpfe in Zeile 4.
- Eintragen der Startwerte unter den Spaltenköpfen in C5 und E5.
- Erzeugen des Mittelwerts mit der Formel "=(C5+E5)/2" in D5.
- Abruf des Funktionswerts zur linken Randstelle mit der Formel "=f(C5)" in Zelle G5.
- Kopieren der Formel in G5 nach H5 und I5 durch Ziehen mit der Maus an der Ecke rechts unten. Der ursprüngliche Bezug auf die Zelle C5 wird - im Sinne einer relativen Adressierung - fortgeschrieben: Aus "=f(C5)" wird "f(D5)" bzw. "f(E5)".
- Eintragen der Formel "=WENN(G5*H5>0;D5;C5)" in C6.
  Hier wird über die Weiterführung entschieden:
  Wenn beim vorangehenden Intervall die Funktionswerte über dem linken Rand und über der Mitte im Vorzeichen übereinstimmen, dann soll die Mitte die Rolle des linken Randes übernehmen. Sonst soll der linke Randwert unverändert übernommen werden.
- Eintrag der Formel "=WENN(C6=C5;D5;E5)" in das Feld E6.
- Wenn der linke Rand unverändert übernommen ist, dann übernimmt die Mitte die Rolle des rechten Randes. Sonst wird der rechte Rand von oben übernommen. Übernahme der Mittelwertformel in D5 in das Feld D6 durch Herunterziehen.
- Kopieren der Formeln im Bereich von G5 nach G6 bis I6 durch Herunterziehen.
- Kopieren des Bereichs von C6 bis I6 bis in die 35. Zeile durch Herunterziehen der Formeln.

Damit ist die Berechnung der ersten 30 Intervalle der Folge abgeschlossen.

7.2.3.4 Literatur

[1] *Tischel, G.:* Angewandte Mathematik. Diesterweg, Frankfurt/M. 1980.
[2] *Stöcker, H.:* Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Harry Deutsch Verlag, Frankfurt/M. 1999.

7.2.3.5 Kontakt

v. Pape, Bodo — *Bodo@vonPape.de*

Rothkirch, Harald — *H.Rothkirch@tu-bs.de*

7.2.4 Lösen von Gleichungen mithilfe der Fixpunktiteration

<table>
<tr><td colspan="2">

Das auf den voranstehenden Seiten vorgestellte Intervallhalbierungsverfahren weist unbestreitbare Vorzüge auf: es ist unmittelbar einsehbar; es sind kaum algebraische Vorkenntnisse erforderlich; Überlegungen zur Konvergenzgeschwindigkeit gestalten sich als sehr einfach; bei jedem Schritt verdoppelt sich die Genauigkeit. Fazit: der Zeitaufwand bleibt relativ gering, um ein (fast) universelles iteratives Verfahren zum Gleichungslösen kennen zu lernen.

Im Folgenden wird mit der Fixpunktpunktiteration eine echte Alternative zum Halbierungsverfahren vorgestellt. Seine Erarbeitung ist wesentlich zeitaufwendiger, man muss sich schon ein wenig anstrengen, um es zu verstehen. Aber: die Fixpunktiteration weist eine so große Fülle von mathematischen Ideen und didaktischen Vorzügen auf, dass man diese Alternative in seine Überlegungen zur Unterrichtsplanung mit einbeziehen sollte.

Worin liegen diese Vorzüge? Da ist zunächst einmal die Einbeziehung verschiedener mathematischer Gebiete zu erwähnen (lineare Iteration, reelle Zahlen, Wachstumsprozesse, Analysis). Weiter kann die Visualisierungsmöglichkeit durch das WEB-Verfahren zu einem tragfähigen Verständnis von Konvergenz führen. Es werden darüber hinaus wesentliche propädeutische Grundlagen für den Steigungsbegriff bei krummlinigen Graphen und für das NEWTON-Verfahren gelegt. Schließlich bietet seine Erarbeitung viele Gelegenheiten zum Vermuten, Fragen stellen, Entdecken, Experimentieren und zu heuristischen Aktivitäten, wobei insbesondere die Vielseitigkeit der Idee der Rekursion sichtbar wird. Und last but not least: die Fixpunktiteration kann dank der ihr innewohnenden mathematischen Ideen sehr viel schneller als das Halbierungsverfahren sein.

Die Grundlage für den hier beschriebenen Unterrichtsgang bildet die Vortragsausarbeitung [4] von *Kühl*, die darüber hinaus viele bemerkenswerte Überlegungen zu Iterationen im Sek. I enthält.

</td></tr>
<tr><td>besondere Materialien/Technologie:
• GTR</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
• 6 bis 8 Unterrichtsstunden (ohne Lernkontrolle)</td></tr>
</table>

Gliederung

7.2.4.1 Der Unterrichtsgang *246*

7.2.4.2 Aufgabe zur Klassenarbeit „Gleichungslöseverfahren“ *256*

7.2.4.3 Anlagen *256*

7.2.4.4 Literatur *258*

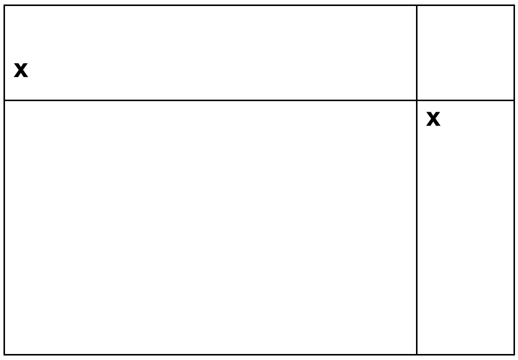
7.2.4.5 Kontakt *258*

7.2.4.1 Der Unterrichtsgang

<u>1. Stunde:</u> *Die Fixpunktgleichung - aus der Not eine Tugend machen*

Als Einstieg sollte ein *einfaches Problem* gewählt werden, das auf eine *quadratische Gleichung* führt, die ohne algebraische Spezialkenntnis nicht gelöst werden kann. Diese Forderungen werden von folgendem *Einstiegsproblem* erfüllt:

Im Rahmen einer Straßenverbreiterung soll ein rechteckiges Eckgrundstück mit den Abmessungen 25 m x 40 m gleichmäßig um eine feste Breite x verkleinert werden (siehe Skizze). Aufgrund einer Gemeindebestimmung braucht der Besitzer aber nicht mehr als 1/6 seiner Grundstücksfläche abzugeben, in diesem Fall also höchstens 166 m².



Bestimme die größtmögliche Breite x.

Der Ansatz $(40 - x) * (25 - x) = 1000 - 166$ ist leicht zu finden; er könnte zu folgender Gleichung führen:

$$(0) \quad x^2 - 65\,x = -166$$

Mehr Schwierigkeiten bereitet dagegen die Aufforderung, diese Gleichung algebraisch zu lösen. Die bei linearen Gleichungen erworbene Strategie, x zu isolieren, führt möglicherweise zu Ausdrücken wie

(1) $x = 166 : (65 - x)$ oder

(2) $x = \sqrt{65x - 166}$ oder

(3) $x = 65 - 166 : x$ oder

(4) $x = x^2 - 64\,x + 166$ oder ... .

Nach dem bisherigen Verständnis sind das unerfreuliche Gleichungen: Auf allen rechten Seiten steht immer noch das gesuchte x (zur Berechnung von x kann man nicht x selbst benutzen). An dieser Stelle gilt es, die Schülerinnen und Schüler zu ermutigen, trotzdem mit einer der obigen Gleichung weiter zu arbeiten. Zwei Wege sind dann denkbar:

- Die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an die Möglichkeit, die beiden Seiten der Gleichung jeweils als Funktionsterm aufzufassen; sie zeichnen die zugehörigen Graphen mit dem GTR und lesen dann die Lösung des Problems aus ihrem Schnittpunkt ab (Visualisierung der Lösung), oder
- sie machen eine „vernünftige“ Schätzung für x und führen damit eine Art „Probe“ durch. Wählt man etwa x = 5, so ergibt seine Einsetzung in den rechten Term von Gleichung (1) den Wert 2,7666 (leider kein Treffer). Der einzusetzende x-Wert sollte kleiner als 5 sein (warum?). Jetzt sind Ideen gesucht. Folgender Vorschlag muss in der Regel von der Lehrkraft kommen: Wie wäre es, als neue Schätzung den Wert der rechten Seite zu nehmen? Er ist ja schließlich durch Einsetzung in einen Term entstanden, der zum Ausgangsproblem gehört.

Diese Idee führt für die Gleichung (1) zu folgender Tabelle:
„linke Seite x“ – „rechte Seite 166 : (65 - x)“:

x	166 : (65 – x)
5	2, 7666
2, 7666	2, 6674
2, 6674	2, 6631
2, 6630	2, 6629
2, 6629	2, 6629

Schon nach wenigen Schätzungen stimmen die beiden Seiten in mindestens 4 Nachkommastellen überein, die „Probe“ ist aufgegangen.

Man sollte auch andere Vorschläge, wie „bilde den Mittelwert von linkem und rechtem Wert“, anhand einer Tabelle verfolgen. Durch vergleichende Betrachtung wird man dann den Vorzug des rekursiven Verfahrens (*rekursiv* - Rückgriff auf den Vorgänger)

- „nimm den gerade errechneten Wert als neuen Schätzwert“ -

besonders gut würdigen (die Schnelligkeit, mit der der gesuchte x-Wert erreicht wird).

Als Aufgabe sollen auch die Gleichungen (2) bis (4) mit dem rekursiven Verfahren bearbeitet werden, möglicherweise mit verschiedenen ersten Schätzwerten (Startwerten) [die restlichen Aufgaben zu Hause].

<u>2. Stunde:</u> Darstellung von Rekursionen auf dem GTR

Die Besprechung der Aufgabe zeigt, dass die rekursive Abarbeitung der drei Gleichungen zu überraschend unterschiedlichen Ergebnissen führt:

- (2) und (3) landen nach einigen Schritten bei dem Wert x = 62,3371. Was hat diese Lösung mit unserem Flächenproblem zu tun? Eine lohnende Frage!
- (4) steuert überhaupt keinen festen Wert an; im Gegenteil, die Werte werden zunehmend größer.
- Bei alledem haben die gewählten Startwerte bei keiner der Gleichungen irgendeinen Einfluss auf das *langfristige Verhalten* des zugehörigen rekursiven Verfahrens.

Es stellt sich die Frage, ob man derartige Verhaltensweisen auch bei anderen Gleichungen beobachten kann. Bevor das geschieht, sollte man zur Arbeitserleichterung mit den Schülerinnen und Schülern den Umgang mit rekursiven Folgen auf dem GTR erarbeiten. Und wiederum davor sollte man klären, wie eine Rekursion überhaupt aufgeschrieben wird, was für Mittelstufenschülerinnen und -schüler gar nicht so leicht nachzuvollziehen ist.
Dazu sollte man der obigen Tabelle eine Spalte voranstellen, in der die jeweilige Nummer der Schätzung festgehalten wird. So schreibt man für die erste Schätzung $x(1) = 5$,
woraus sich die zweite Schätzung errechnet durch $x(2) = 166 : (65 - x(1))$
und die dritte durch $x(3) = 166 : (65 - x(2))$.
Die n - te Schätzung ergibt also folgendermaßen $x(n) = 166 : (65 - x(n-1))$,
eine Schreibweise, die auch der GTR versteht.

<u>Aufgabe</u>
Ausgangspunkt ist jetzt die Gleichung $x^3 = x^2 +1$. Forme sie auf mindestens 2 verschiedene Arten so um, dass ein x auf der linken Seite allein steht. Führe mit diesen neuen Gleichungen jeweils das rekursive Verfahren mit dem Startwert x(1) = 1,5 und noch zwei weiteren selbstgewählten Startwerten mithilfe des GTR (Tabellenmodus) durch. Beschreibe jeweils das langfristige Verhalten des Verfahrens (ggf. zu Hause beenden).

<u>3. Stunde:</u> Das WEB-Verfahren als Visualisierung von Rekursionen

Aus dem Vergleich der Tabellen der Aufgabe der letzten Stunde und den Beobachtungen der Einstiegsaufgabe ergeben sich folgende Fragen:

(a) Warum „funktionieren“ manche Verfahren, andere dagegen nicht? Kann man das Funktionieren einer Gleichung möglicherweise ansehen?
(b) Warum kommt man bei einer „funktionierenden“ Gleichung immer nur zu einer Lösung und niemals zu der (den) anderen möglichen Lösung(en)?

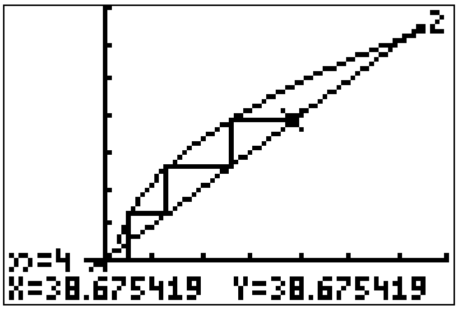
(c) Steuern alle möglichen Startwerte diese eine Lösung an?

(d) Woran liegt es, dass manche der „funktionierenden“ Verfahren schneller sind als die anderen?

Einen besonders guten Zugang zu diesen Fragen erhält man, wenn man die Entwicklung der Tabellenwerte geeignet veranschaulicht. Für explizite Folgen < x(n) > ist bekanntlich das Zeitdiagramm die angemessene Visualisierung; bei ihm wird der Folgenwert x(n) gegen die Folgennummer n (im allgemeinen als Zeit zu interpretieren) aufgetragen. Die für Rekursionen adäquate Darstellungsweise ist das so genannte *Spinnwebverfahren* WEB. Durch dieses Verfahren werden, ausgehend von dem Startwert x(1), die Folgewerte in einem *x(n-1)–x(n)-Diagramm* grafisch erzeugt.

Wenn das WEB-Verfahren noch nicht bekannt ist (etwa durch den Baustein 3.2.7 beim „Prozentualen Wachstum“ - Erweiterung - oder durch den Baustein 3.3.6 beim „Heron-Verfahren“), kann man bei seiner Einführung zwischen folgenden beiden Vorgehensweisen wählen:

- dem (zeitsparenden) „praktischen“ Zugang: WEB auf dem GTR durchführen und dabei gemeinsam das entstandene Bild verstehen lernen;



GTR-Darstellung des WEB-Diagramms für die Rekursion von Gleichung (2):

x = $\sqrt{65x-166}$;

  - „Welche beiden Graphen sieht man?“ „ Warum wird die Winkelhalbierende vom Rechner automatisch erzeugt?“ „Warum läuft der Iterationspfad stets zuerst vertikal zum Graphen und dann horizontal zur Winkelhalbierenden hin?“ ... - ;

- dem (etwa eine Unterrichtsstunde mehr kostenden) „entdeckenden“ Zugang:
  - die Werte der ursprünglichen Tabelle in ein x(n-1)–x(n)-Diagramm übertragen
  - entdecken lassen, dass diese Punkte alle auf dem Graphen g liegen, der durch die rechte Seite der Gleichung beschrieben wird („Trägergraph“)
  - die Winkelhalbierende w (linke Seite der Gleichung) als „Input-Output-Umwandler“ interpretieren.

Hausaufgabe (arbeitsteilig)

(a) Führe das WEB-Verfahren auf dem GTR/per Hand [je nach Zugang] für die 4 Rekursionen zu den Gleichungen (1) bis (4) der Einstiegsaufgabe für jeweils zwei verschiedene Startwerte durch.

(b) Vergleiche deine grafischen WEB-Ergebnisse mit den Ergebnissen der zugehörigen Tabellen.
(c) Stelle Vermutungen darüber auf,
 - wann eine Rekursion „funktioniert“, d. h. sich immer besser einem festen Wert annähert, und
 - wenn ja, warum sie gegen den einen Schnittpunkt von Trägergraph g und Winkelhalbierender w, aber nicht gegen den anderen Schnittpunkt läuft.

<u>*4. Stunde:*</u> *Vermutungen über das Konvergenzverhalten*

Sammeln der WEB-Bilder aus der Hausaufgabe an der Tafel (nur schematische Darstellung); Zusammen tragen der aufgestellten Vermutungen:

(1) „Die Rekursion läuft gegen einen festen Wert“ bedeutet anschaulich: das WEB-Verfahren bewegt sich gegen den Fixpunkt von g, d. h. gegen den Schnittpunkt von Trägergraph g und Winkelhalbierender w.
(2) Fällt die Kurve g bei ihrem Fixpunkt, so verläuft der Iterationspfad spiralförmig, andernfalls ist er treppenförmig.
(3) Wenn ein Startwert x(1) [$\neq$ x] zum Fixpunkt x läuft, dann tun dies auch alle „benachbarten“ Startwerte.
(4) Das WEB-Verfahren läuft gegen den Fixpunkt x, wenn
 - die Streckenlängen des Iterationspfades sich immer mehr der Länge 0 annähern
 - die Kurve von g bei x (hinreichend) flach ist.
(5) Je flacher die Kurve beim Fixpunkt ist, desto schneller erfolgt die Annäherung an den Fixpunkt.

<u>Hausaufgabe</u>
Führe das WEB-Verfahren per Hand (!) durch für die Rekursionen zu

(a) x = 0,8 x – 1 mit x(1) = 1 (b) x = 1,5 x + 6 mit x(1) = 0 (c) x = -0,5 x + 9 mit x(1) = -1.

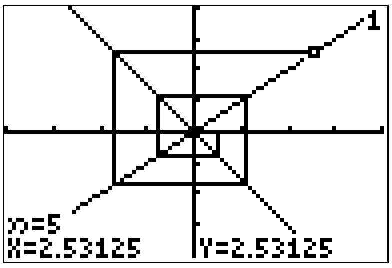
<u>*5. Stunde:*</u> *Alles über lineare Fixpunktiterationen*

Spätestens an dieser Stelle sind zwei Begriffe fällig: Ausgehend von einer so genannten *Fixpunktgleichung* (Gleichung der Form x = g (x)) kann die zugehörige Rekursion schrittweise gegen deren Lösung, einem Fixpunkt laufen. Deshalb nennt man ein derartiges Verfahren auch *Fixpunktiteration*.

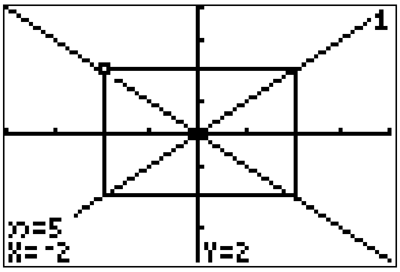
Die linearen WEB-Bilder der Hausaufgabe sollen die Vermutungen der letzten Stunde bestätigen. Mehr noch, sie bieten eine gute Ausgangssituation, die vage Vorstellung aus Vermutung (4) (die Kurve von g muss beim Fixpunkt *(hinreichend) flach* verlaufen) zu konkretisieren. Dazu wird eine Übersicht über *alle möglichen* WEB-Erscheinungsformen bei *linearen* Fixpunktiterationen

$$x(n) = m * x(n-1) + b$$

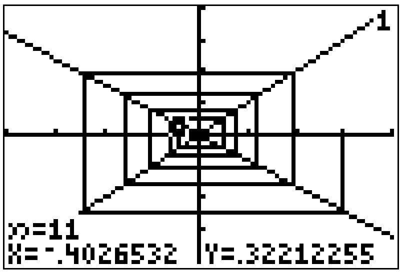
systematisch erarbeitet (d. h. die relevanten Steigungswerte m variieren; zuvor sollte man plausibel machen, dass man b = 0 ohne Verlust an Erkenntnissen wählen darf):



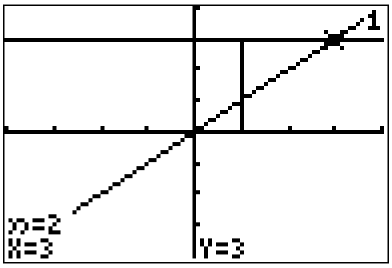
m = -1,5 ; x(1) = 0,5



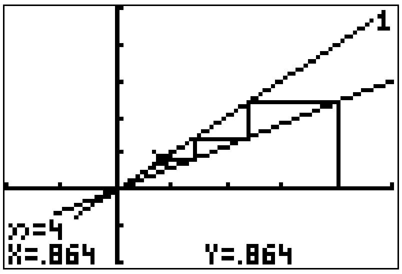
m = -1 ; x(1) = 2



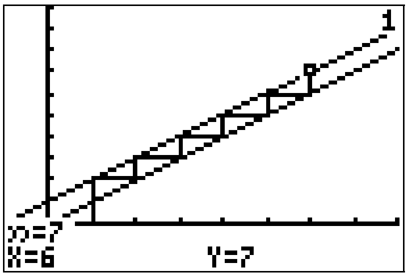
m = -0,8 ; x(1) = 3



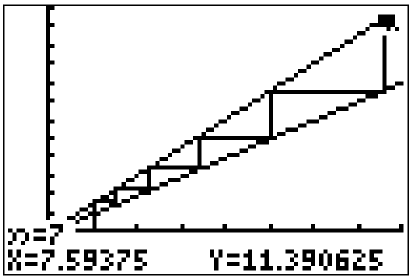
m = 0 (b = 3) ; x(1) = 1



m = 0,6 ; x(1) = 4



m = 1 (b = 1) ; x(1) = 1



m = 1,5 ; x(1) = 1

Als Ergebnis erhalten wir folgende Präzisierungen der Vermutungen (3) und (4) aus der 4. Stunde, den

Fixpunktsatz für lineare Iterationen:

*Die lineare Iteration x(n) = m * x(n-1) + b konvergiert für alle Startwerte x(1) gegen seinen Fixpunkt x, wenn die Steigung m kleiner als 1 und größer als –1 ist.*

Mit diesem Rüstzeug kann man jetzt *Prognosen* über lineare Iterationen aufstellen, d. h. Vorhersagen über ihren langfristigen Verlauf machen, *ohne* die Iteration selbst durchzuführen.

<u>Aufgabe</u>

Stelle eine Prognose auf, ob die Iterationen zu folgenden Fixpunktgleichungen konvergieren und berechne gegebenenfalls den angestrebten Wert (= Fixpunkt):

(a) $x = 0{,}6\,x - 2$ mit $x(1) = 3$ (b) $x = 1{,}6\,x + 3$ mit $x(1) = 0$ (c) $x = -0{,}5\,x + 6$ mit $x(1) = -1$.

Betätige deine (theoretischen) Ergebnisse mit dem *WEB*-Verfahren auf dem GTR (ggf. zu Hause beenden).

<u>6. Stunde</u>: Das HOFSTADTER-Prinzip

Besprechung der Hausaufgabe und Festigung der Fähigkeit, Prognosen bei linearen Iterationen aufzustellen

Mit der Fixpunktiteration haben wir eine Möglichkeit gefunden, lineare, quadratische und auch höherwertige Gleichungen zu lösen nach folgendem *Prinzip*:

> *Forme deine Gleichung in eine Fixpunktgleichung um, starte irgendwo und hoffe, dass dich die zugehörige Iteration zu einem Fixpunkt, d. h. zu einer Lösung der Gleichung führt.*

Dieses Prinzip, aufgestellt von *Hofstadter* in [3], ist zugegebenermaßen recht mystisch; andererseits ist es ziemlich erfolgreich und vor allem vielseitig anwendbar, auch dort, wo man es gar nicht vermutet. Ein besonders schönes Beispiel aus der Unterhaltungsmathematik wird in Anlage 3 vorgestellt; es eignet sich hervorragend dazu, mit einer echten Überraschung aus dieser Unterrichtseinheit auszusteigen.

Wenn man eine leistungsstarke Klasse und überdies noch etwas Muße hat, so sollte man noch zwei weitere lohnende Stunden mit dem Thema „Gleichungslösen mittels Fixpunktiterationen“ verbringen.

<u>7. - 8. Stunde</u>: Verfahrensarchitektur: das vereinfachte NEWTON-Verfahren

So einfach das *HOFSTADTER*-Prinzip auch ist, es bleibt natürlich unbefriedigend, dass man einer konkreten Fixpunktgleichung nicht ansehen kann, ob sie auch „funktioniert“.

Als Frage formuliert:

> *Ist es Glück, ob man unter den vielen möglichen Fixpunktgleichungen eine erwischt, die die Ausgangsgleichung iterativ löst, oder kann man das Glück möglicherweise auch „erzwingen“?*

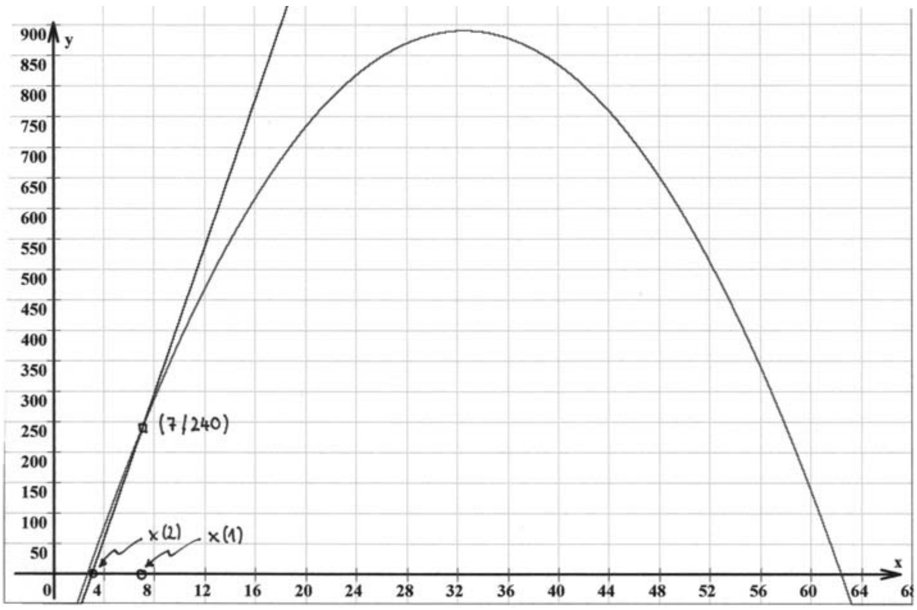
Die Erkenntnis, dass die Steilheit des Graphen in seinen Fixpunkten für das Funktionieren zuständig ist, ist für nicht-lineare Funktionen sicher zu vage (im Sek. II ist man dank des Ableitungsbegriffes viel klüger). Trotzdem können wir auch schon mit den Möglichkeiten im Sek. I den vermeintlichen Zufall ausschließen.

Im Folgenden erarbeiten wir eine Fixpunktiteration, die (fast) immer funktioniert. Man kann sie als „kleine Schwester" des so leistungsfähigen NEWTON-Verfahrens betrachten (eine schöne Propädeutik für die Oberstufenmathematik).

<u>Verfahrensarchitektur für Fixpunktiterationen</u>

Grundlage ist die *Idee der Linearisierung,* die auch bei der Untersuchung von krummlinig begrenzten Flächen und Körpern (siehe Baustein 3.3.8 „Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Näherungsverfahren") eine entscheidende Rolle spielt. Da die Idee der Linearisierung bei Funktionen aber erst im Sek. II bei der Grundlegung von Differential- und Integralrechnung zum Tragen kommt, sollte man folgenden Gedankengang als *Lehrervortrag* entwickeln:

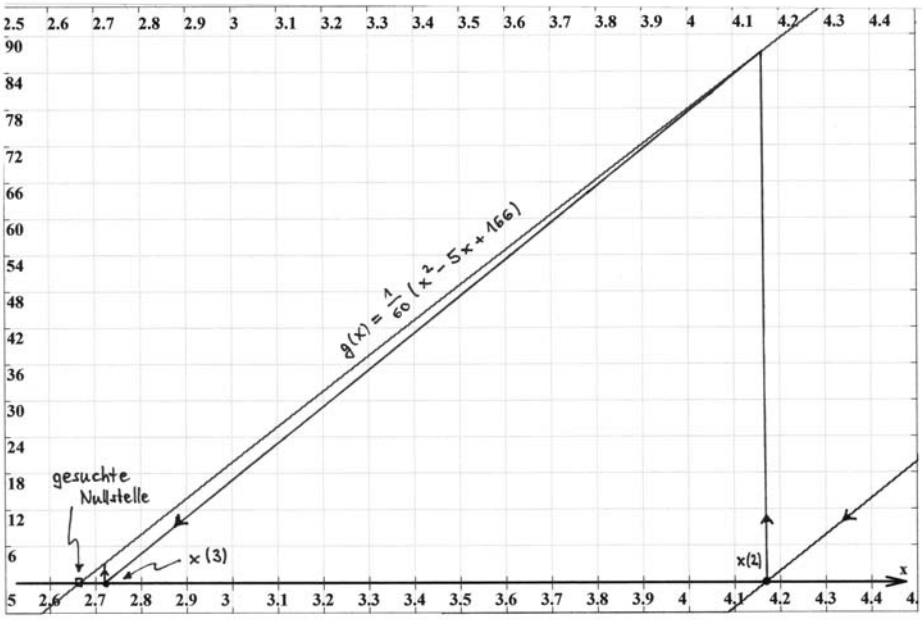
- Die Gleichung unseres Einstiegproblems $x^2 - 65\,x = -166$ kann man so umformulieren, dass seine Lösungen genau die Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2 + 65x - 166$ sind (Wechsel des ...).
- Mit linearen Termen kann man gut rechnen; deshalb ersetzen wir den Graphen von f im Bereich der zu bestimmenden Nullstelle durch eine Gerade und *schätzen* ihre Steigung. Genauer: Wir bestimmen einen Punkt P(x(1)/f(x(1)) in der „Nähe" der gesuchten Nullstelle, hier etwa P(7/240). Von diesem Punkt aus „zielen" wir auf einen Punkt Q(x(2)/0) auf der x-Achse unmittelbar bei der Nullstelle, hier etwa Q(3/0).



Diese „Zielgerade“ hat die Steigung $m = \frac{f(x(1))}{x(1) - x(2)}$, hier: $m = \frac{240}{7-3} = 60$.

- Wenn wir nun diese letzte Gleichung umstellen zu $x(1) \cdot m - x(2) \cdot m = f(x(1))$ und diese wiederum zu $x(2) \cdot m = x(1) \cdot m - f(x(1))$, so erhalten wir eine allgemeine Vorschrift, wie man x(2) mithilfe der geschätzten Steigung m aus x(1) erhält: $x(2) = x(1) - \frac{f(x(1))}{m}$.

- Analog berechnen wir den nächsten Näherungswert x(3) : $x(3) = x(2) - \frac{f(x(2))}{m}$.



Der Witz an diesem Vorgehen ist also, die einmal gewählte Steigung m zur Berechnung aller weiteren Näherungswerte beizubehalten.

- So gelangen wir schließlich zu folgender Rekursion:

$$x(n) = x(n-1) - \frac{f(x(n-1))}{m},$$

dem vereinfachten NEWTON-Verfahren.

Das vereinfachte NEWTON-Verfahren ist tatsächlich eine Fixpunktiteration:
Die Ausgangsgleichung muss zunächst nach 0 aufgelöst werden, d. h. als Nullstellengleichung einer Funktion f geschrieben werden:

$$f(x) = 0 .$$

Diese Gleichung wird durch einen Wert m (die geschätzte Steigung in der Nähe der gesuchten Lösung) dividiert und mit (-1) multipliziert:

$$0 = - \frac{f(x)}{m}.$$

Die Addition von x auf beiden Seiten ergibt schließlich die zum vereinfachten NEWTON-Verfahren gehörende Fixpunktgleichung:

$$x = x - \frac{f(x)}{m}.$$

Wie sieht nun das vereinfachte NEWTON-Verfahren für unser Einstiegsproblem aus? Aus der Nullstellengleichung $f(x) = -x^2 + 65x - 166$ und der oben geschätzten Steigung $m = 60$ erhalten wir mit

$$x(n) = x(n-1) + \frac{1}{60} \cdot [\, x(n-1)^2 - 65\, x(n-1) + 166 \,]$$

$$= \frac{1}{60} \cdot [\, x(n-1)^2 - 5\, x(n-1) + 166 \,] \qquad (*, \text{s. u.})$$

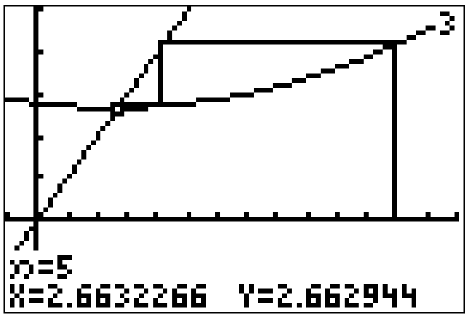
eine Iterationsvorschrift, die selbst für einen schlechten Startwert wie x(1) = 12 zu folgender Annäherung an eine Nullstelle von f, der Lösung des Einstiegproblems, führt.

n	x (n)
1	12
2	4,17
3	2,709
4	2,6632
5	2,66294
6	2,6629425
7	2,662942504
8	2,662942504

Die Konvergenz ist tatsächlich erstaunlich schnell, und das trotz der äußerst groben Schätzung des Steigungswertes m.

Bestätigt wird dieser Sachverhalt durch die Visualisierung der Rekursion (*) für x(1) = 12 im WEB-Modus der GTR:

Der Graph der Rechten-Seite-Funktion g : y = 1/60 ($x^2 - 5x + 166$) schneidet die Winkelhalbierende tatsächlich sehr flach.



Aufgabe

(1) Zeige, dass die zur Rekursion (*) gehörende Fixpunktgleichung x = 1/60 ($x^2 - 5x + 166$) äquivalent ist zur Ausgangsgleichung $65x - x^2 = 166$.

(2) Stelle für die zweite Lösung (= zweite Nullstelle von f) des Einstiegproblems ein vereinfachtes NEWTON-Verfahren auf und führe es aus.

7.2.4.2 Aufgabe zur Klassenarbeit „Gleichungslöseverfahren“

Betrachte die beiden Fixpunktpunktgleichungen

$$(1)\quad x = x^2 - 3x + 3 \qquad \text{und} \qquad (2)\quad x = \sqrt{(4x-3)}\,.$$

(a) Zeige, dass die beiden Gleichungen äquivalent sind zur Nullstellengleichung einer Funktion f und gib dieses f an.

(b) Führe das WEB-Verfahren für die beiden zugehörigen Fixpunktiterationen (FPI) jeweils mit dem Startwert x(1) = 2,5 durch.

I. Gegen welche Werte läuft x(1) jeweils?

II. Warum steuern die beiden FPI nicht denselben Fixpunkt an?

III. Warum konvergiert die FPI zur Gleichung (1) schneller als die FPI zur Gleichung (2)?

(c) Erstelle ein vereinfachtes NEWTON-Verfahren für den Fixpunkt „x_1“ zu Gleichung (1) und zeige, dass es noch schneller gegen „x_1“ konvergiert als die FPI aus Teil b.

7.2.4.3 Anlagen

Hofstadter hat sich in dem Buch „Metamagicum“ [3] intensiv mit dem Prinzip der Rekursion, von ihm auch „Rückspeisung“ genannt, auseinander gesetzt. Dort diskutiert er auf S. 411 f auch folgendes Problem, „eines der intuitionsstärksten wie auch entzückendsten Beispiele für das Einrasten“, wie *Hofstadter* in seiner bildhaften Sprache kommentiert:

Vervollständige folgende Aussageform mit ein- oder mehrziffrigen Zahlen so, dass eine wahre Aussage entsteht:

„In diesem Satz kommt die 0 ___ mal vor, die 1 ___ mal, die 2 ___ mal, die 3 ___ mal, die 4 ___ mal, die 5 ___ mal, die 6 ___ mal, die 7 ___ mal, die 8 ___ mal und die 9 ___ mal.“

Überraschenderweise kann man dieses Problem mithilfe des *HOFSTADTER*-Prinzips lösen. Nachdenken muss man eigentlich nur darüber, wie eine passende Rekursion dafür aussieht.

Als eine 1. Schätzung könnte man etwa die Zahlen 1 (für die 0), 5 (für die 1), 2 (für die 5) und jeweils 1 für die übrigen Zahlen setzen; sie besteht also aus folgendem *Zehntupel*

$$X(1) = (1 , 5 , 3 , 2 , 1 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1) .$$

Setzt man nun diese 1. Schätzung in die Aussageform ein und zählt dann die jeweils auftretenden Ziffern 0, 1, ... , 9 , so erhält man als 2. Schätzung

$$X(2) = (1 , 7 , 3 , 2 , 1 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1) \qquad (X)$$

(die 0 kommt bei der Zählung nämlich insgesamt 1 mal vor, die 1 genau 7 mal, die 2 genau 3 mal usw.).

Wir haben das Problem gelöst, wenn sich die Rekursion nach diesem Vorgehen in einem „Fixtupel" festläuft, dort „einrastet", d. h. wenn bei einem Iterationsschritt k $X(k) = X(k-1)$ gilt.

Nach dem *HOFSTADTER*-Prinzip kann man „irgendwo" beginnen; wir wählen deshalb als Starttupel die unsinnige Einsetzung

$$X(1) = (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9) .$$

Jede Ziffer kommt so oft vor, wie sie selbst angibt. Die obige Rekursionsvorschrift liefert uns dann folgende Einsetzungen:

$$X(2) = (2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2)$$
$$X(3) = (1 , 1 , 11 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1)$$
$$X(4) = (1 , 12 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1)$$
$$X(5) = (1 , 11 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1)$$
$$X(6) = (1 , 11 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1) .$$

Die Lösung des Problems ist dank der obigen Rekursion schon nach 4 Schritten gefunden.

<u>Bemerkung für Interessierte:</u> Es gibt noch eine weitere Lösung, nämlich das obige Zehntupel aus (X). Man kann langfristig allerdings auch in einem so genannten „Zweierzyklus" landen: Das Starttupel (8 , 7 , 4 , 2 , 5 , 0 , 8 , 6 , 4 , 4) beispielsweise führt zu den beiden Zehntupeln (1 , 8 , 2 , 1 , 2 , 1 , 1 , 2 , 1 , 1) und (1 , 7 , 4 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 2 , 1), die sich fortwährend abwechseln. Mehr darüber findet sich in *Behr* [1], S. 74 f.

Hofstadters Vermutung, dass es neben diesen drei langfristigen Erscheinungsformen (so genannten „Attraktoren") keine weiteren mehr gibt, konnte 1994 von *Behr* in [2] bewiesen werden.

Abschließend noch ein weiteres Beispiel für die Anwendbarkeit des *HOFSTADTER*-Prinzips. Es stammt ebenfalls aus der Unterhaltungsmathematik und kann auch schon mit jüngeren Schülerinnen und Schülern besprochen werden.

Die Zahl *495* hat eine besondere, unter den dreistelligen Zahlen sogar eine einzigartige Eigenschaft: Wenn man aus ihren Ziffern sowohl die größte als auch die kleinste Zahl bildet und diese beiden Zahlen voneinander subtrahiert, so erhält man wieder die Ausgangszahl: 954 – 459 = 495.
Wenn man nun mit einer fast beliebigen dreistelligen Zahl (Ausnahme: drei gleiche Ziffern) startet, ihre Maximaldifferenz bildet und diese als neue Ausgangszahl nimmt, so wird man durch diese Rekursion schon bald zu 495 geführt ... .

Nebenbei bemerkt: Diese Rekursion kann man auch mit vierstelligen Zahlen durchführen, mit zweistelligen allerdings nicht.

7.2.4.4 Literatur

[1] *Behr, R.:* Fraktale - Formen aus Mathematik und Natur. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993.
[2] *Behr, R.:* Ein falscher Satz und seine mathematischen Bezüge. In: Praxis der Mathematik, (1993) 6.
[3] *Hofstadter, D. R.:* Metamagicum. Klett-Cotta Verlag, Stuttgart 1988.
[4] *Kühl, R.:* Iterationen in der Mittelstufe - Was uns Zenon der Ältere zu sagen hat .... Vortragsausarbeitung, Wedesbüttel 2002 (kann bei mir elektronisch angefordert werden).

7.2.4.5 Kontakt

Dr. Eckart Beutler *Eckart.Beutler@freenet.de*