6 Zahlbereichserweiterung II: Wurzeln und ihre Dezimaldarstellungen

6.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „3.3.6 Zahlbereichserweiterung II: Wurzeln und ihre Dezimaldarstellungen“

Wurzeln sollen in ihren geometrischen, numerischen, symbolischen und zahlentheoretischen Aspekten genauer untersucht werden. Insbesondere sollen Wurzeln iterativ bestimmt werden. Dabei wird der Zahlbegriff so verallgemeinert, dass **Q** *zum Zahlbereich* **R** *erweitert werden kann.*

Die *Existenz* von Quadratwurzeln wurde bereits geometrisch belegt z. B. durch den Vergleich von Flächeninhalt und Seitenlänge im Quadrat.

Die *Berechnung* von Quadratwurzeln mit dem Taschenrechner deutet ebenso an, dass zu beliebigen nicht-negativen Zahlen die Quadratwurzel existiert. Die angezeigte Dezimaldarstellung soll iterativ durch Intervallschachtelung oder durch ein geometrisch inspiriertes Verfahren bestätigt werden.

Die *Irrationalität* von Quadratwurzeln soll an überzeugenden Beispielen algebraisch oder geometrisch erarbeitet werden. Das schließt eine Reflexion über die Bruchdarstellung von abbrechenden und periodischen Dezimalzahlen ein. Indem man die unendliche Menge aller nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalzahlen hinzunimmt, entsteht aus **Q** die Zahlenmenge **R** der reellen Zahlen. Dabei muss deutlich werden, dass unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen den bisherigen Zahlbegriff erweitern und dass **Q** dicht in **R** liegt. Abzählbarkeitsfragen brauchen jedoch nicht erörtert werden.

Der *Umgang* mit Wurzeln wird durch die zu erarbeitenden Wurzelgesetze erschlossen. Das Rechnen mit unendlichen Dezimalzahlen im Allgemeinen wirft Probleme auf, die nur exemplarisch zu erörtern sind.

In der Praxis muss man sich auf das Rechnen mit Näherungswerten beschränken. Die bisher in **Q** gültigen Rechengesetze sollen für reelle Zahlen daher nur im Rahmen des Rechnens mit abbrechenden Näherungswerten plausibel gemacht werden.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
Dezimaldarstellung von Quadratwurzeln mit einem iterativen Verfahren, z. B. Heronverfahren oder Intervallhalbierungsverfahren Rechnen mit Näherungswerten und Rechengesetzen in **R** einfache Umformungen mit Wurzeltermen Begründung der Irrationalität oder Inkommensurabilität qualitativer Vergleich von **Q** und **R**	VERNETZUNG Ähnlichkeit (3.3.3) Probleme mit Rechnerzahlen (3.3.8) Gleichungslöseverfahren (3.3.7) Termumformungen Satzgruppe des Pythagoras (3.3.5) DIDAKTIK/METHODIK Prinzip der Zahlbereichserweiterung ERWEITERUNG Dual- bzw. Kettenbruchdarstellungen von reellen Zahlen die Entdeckung der Irrationalität (Problemgeschichte) Abzählbarkeitsfragen Sekantenverfahren

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Hannover 2003, Seite 32)

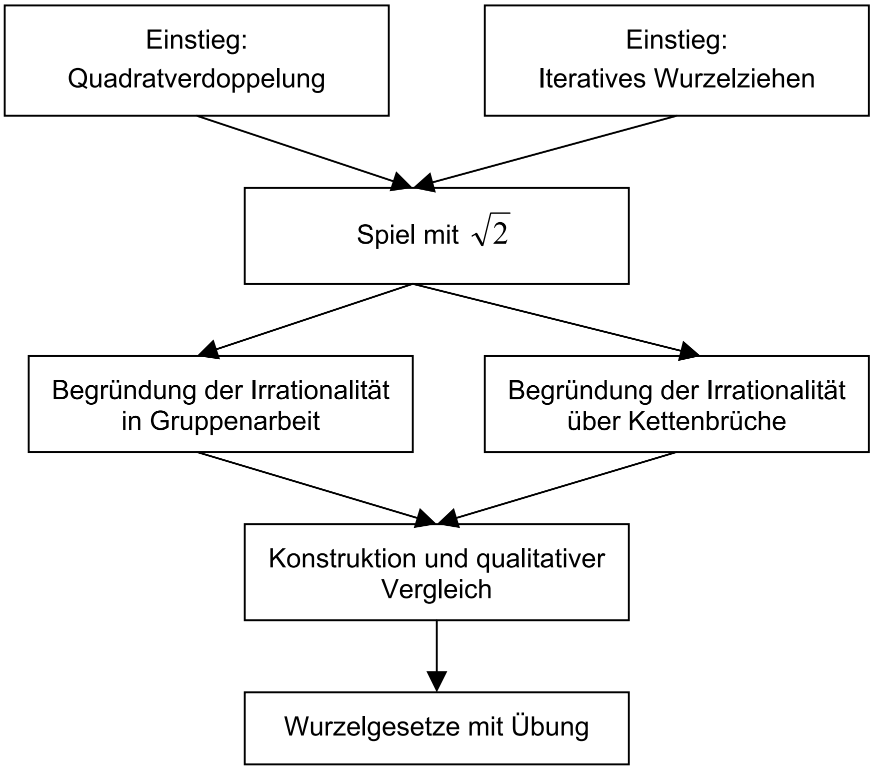
6.2 Unterrichtseinheit „Zahlbereichserweiterung II: Wurzeln und ihre Dezimaldarstellungen“

In den Beispielnetzplänen steht dieser Baustein stets nach den Bausteinen „Rund um die Parabel“ und „3.3.5 Von der Konstruierbarkeit zur Berechenbarkeit“, so dass die *Existenz* von Quadratwurzeln bereits belegt wurde. Die hier vorgelegten Materialien erlauben durch den geometrischen Einstieg aber auch, diesen Baustein vor einem oder gar beiden oben genannten Bausteinen zu erarbeiten. In diesem Fall kann der Aspekt der Existenz zusätzlich betont werden, wobei sich allerdings der Schwerpunkt des Bausteins nicht verschieben sollte. Neben den Näherungsverfahren soll gerade die Stunde „Spiel mit $\sqrt{2}$ “ die Schülerinnen und Schüler zur Auseinandersetzung mit der Darstellung von Zahlen in dezimaler Schreibweise zwingen. Anhand der Untersuchung von Dezimaldarstellungen, auch mit sehr vielen Nachkommastellen, kann zwar kein Beweis geführt werden, aber die Vorstellung von rationalen Zahlen wird reflektiert und die Frage des Nachweises der Rationalität bzw. Irrationalität entsteht. Für den eigentlichen Nachweis der Irrationalität an ausgewählten Beispielen werden wieder verschiedene Vorschläge gemacht. Anschließend werden die wichtigsten Rechengesetze beim Umgang mit Wurzeln erarbeitet. Der hier vorgeschlagene Minimaldurchgang kann natürlich an verschiedenen Stellen erweitert werden. Besonders nahe liegen könnten in diesem Baustein die Untersuchung von Fehlern beim Rechnen mit Näherungswerten und die Fehlerfortpflanzung. Die Übungen zu den Rechenregeln sollten allerdings nicht soweit ausgedehnt werden, dass sie ein Übergewicht im Vergleich zu den anderen Bereichen erhalten.

besondere Materialien/Technologie	**Dauer der Unterrichtseinheit:**
• ggf. DGS, Textverarbeitung	• Minimalprogramm ca. 14 Unterrichtsstunden

Gliederung

6.2.1 Möglicher Unterrichtsverlauf - Übersicht



6.2.2 Einstieg: Quadratverdoppelung

Dieser Baustein kann in Klasse 9 oder 10 an verschiedenen Stellen im Curriculum bearbeitet werden. Zwar setzen die Beispielnetzpläne den Baustein in den Rahmenrichtlinien ziemlich weit ans Ende, so dass hier auf Parabeln und Flächensätze zurückgegriffen werden kann, doch ist es auch möglich, ihn am Anfang von Klasse 9 einzusetzen. Um den Fachkonferenzen größtmögliche Freiheit in der Netzplanung zu gewährleisten, wurde ein Einstiegsbeispiel gewählt, das weitgehend auf Voraussetzungen verzichtet.

Nicht nur der historische Bezug des gewählten Einstiegsbeispiels der Quadratflächenverdopplung, sondern auch seine universelle Einsetzbarkeit lassen es als natürlichen Zugang zur Frage der Wurzel erscheinen. Dennoch stecken in dieser Problemstellung sowohl die Flächensätze als auch die Parabeln, die Näherungsverfahren mittels Schachtelung und nicht zuletzt die Iterationen (Heron) bis hin zu Kettenbrüchen.

Ziele

Die grundsätzliche Frage nach der Quadratflächenverdopplung macht den Zusammenhang zwischen Längen- und Flächenwachstum transparent. Einerseits liefert der Versuch einer schrittweisen Quadratisierung eines Rechtecks das Heron-Verfahren, andererseits führt die Zerschneidung eines Quadrates längs der Diagonalen in natürlicher Weise zur Dezimalschachtelung. Beide Näherungsverfahren legen den Gedanken einer nicht als Bruch darstellbaren Zahl nahe. Schließlich erwächst aus der Problemstellung eine geometrisch tragfähige Definition der Quadratwurzel.

Ausgegangen wird von folgender (offener) Aufgabenstellung

Ein Quadrat mit gegebener Kantenlänge a (=10 cm!) soll in ein Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt verwandelt werden.

Erläuterung

Die Kantenlänge 10 cm bietet sich wegen der Übersichtlichkeit, der einfach anzufertigenden Zeichnung und der anschließenden Messung an.

Sind die Flächensätze bekannt, ergibt sich das gesuchte Quadrat unmittelbar aus dem Satz des Pythagoras (gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck), oder es können zwei gleiche Quadrate, die zu einem Rechteck zusammengelegt werden, mithilfe des Höhen- oder Kathetensatzes in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden. Andernfalls bietet sich das geeignete Zerschneiden und Zusammensetzen zweier gleicher Quadrate zu einem neuen Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt an, wobei diese rein geometrische Lösung über die Frage der Kantenlänge automatisch zur Problematik der Wurzel führt. Ebenso ist denkbar, dass eine Lösung über die schrittweise „Quadratisierung" des Rechtecks unter Beibehaltung des Flächeninhaltes gesucht wird. Dies führt zu iterativen Verfahren (Heron). All dies ist aus der nachstehenden Zeichnung (Bild 1) ablesbar.

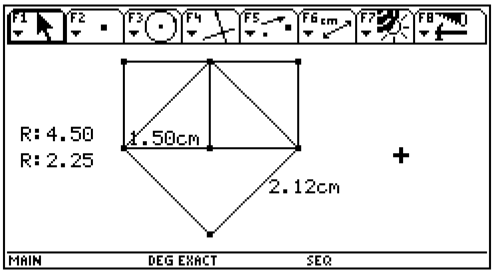


Bild 1

Auf Grund der obigen Überlegungen wird dieser zweite Weg hier weiter verfolgt.

Mit dem durch Zerschneidung gewonnenen Diagonalenquadrat stellt sich sofort die Frage nach der Kantenlänge des neuen Quadrates. Eine nahe liegende Möglichkeit besteht darin, die Seitenlänge des Diagonalenquadrates zu messen, um so den Wert des Flächeninhaltes zu überprüfen.

Suche nach weiteren Dezimalstellen

Das „garantierte Misslingen“, dabei den Flächeninhalt 200 (cm^2) zu erhalten, führt zur (mühseligen) Suche der Schülerinnen und Schüler nach weiteren Dezimalstellen, die sie trotzdem für eine oder zwei Stellen per Hand durchführen sollten. Danach erscheint es sinnvoll, einen GTR zu verwenden. Per eigenständigem Einsatz von Wertetabellen (TBLSET und TABLE) wird rasch deutlich, dass eine „kurze“ Lösung mit wenigen Dezimalstellen wohl nicht existiert (vgl. Bilder 2-14). An dieser Stelle werden übrigens weder das Problem der Irrationalität noch das des Abbrechens der Dezimalentwicklung thematisiert, ja nicht einmal die Frage der Wurzel.

Die Bilder 2 - 8 zeigen eine Lösung mit dem Voyage 200:

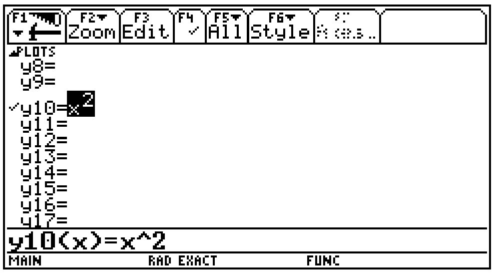


Bild 2

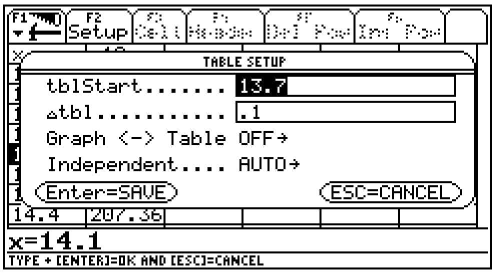


Bild 3

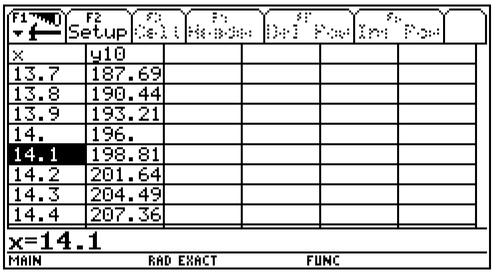


Bild 4

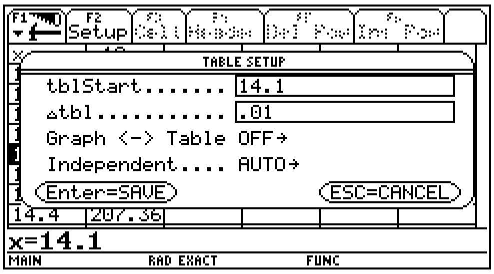


Bild 5

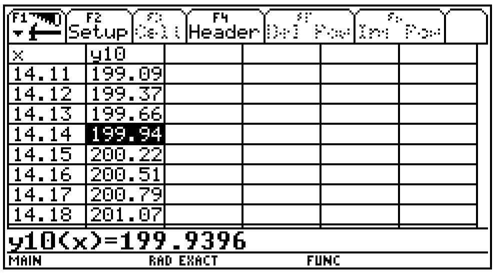


Bild 6

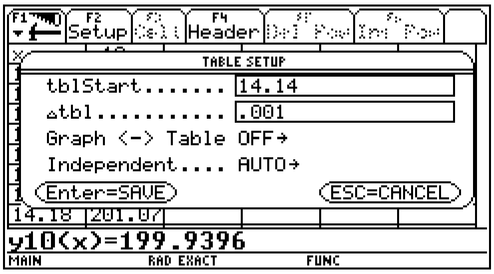


Bild 7

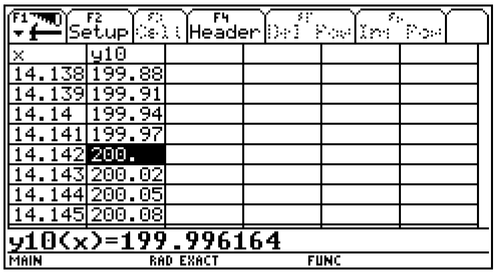


Bild 8

Die nachfolgenden Bilder 9 - 15 zeigen eine entsprechende Lösung mit dem TI 83 Plus:

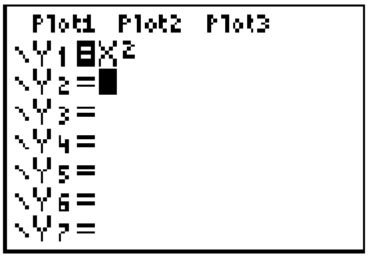


Bild 9

Bild 10

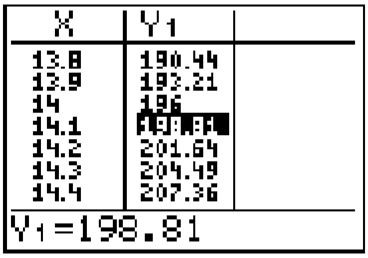


Bild 11

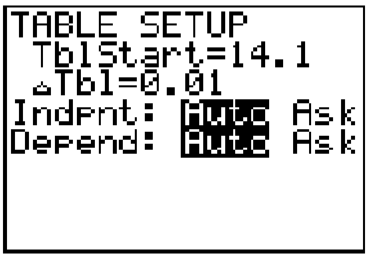


Bild 12

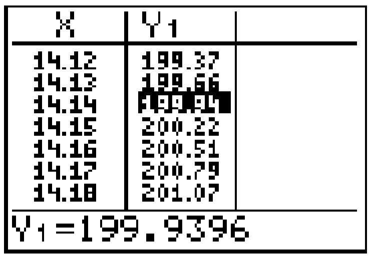


Bild 13

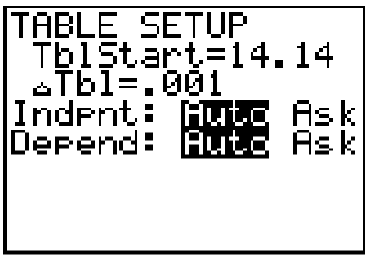


Bild 14

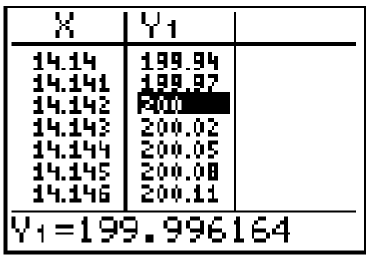


Bild 15

Vom Rechteck zum Quadrat

Sollten Schülerinnen und Schüler statt der Diagonalenkonstruktion zwei gleich große Quadrate zu einem Rechteck zusammenlegen, bleibt für sie ohne die Flächensätze nur die Möglichkeit, das erhaltene Rechteck unter Beibehaltung des Flächeninhaltes schrittweise „quadratischer“ zu machen. In einer offenen Probierphase könnten sie durchaus darauf kommen, die größere der Rechteckseiten zu verkürzen und die andere entsprechend zu verlängern. Die nachstehenden drei Bilder verdeutlichen die denkbare Vorgehensweise.

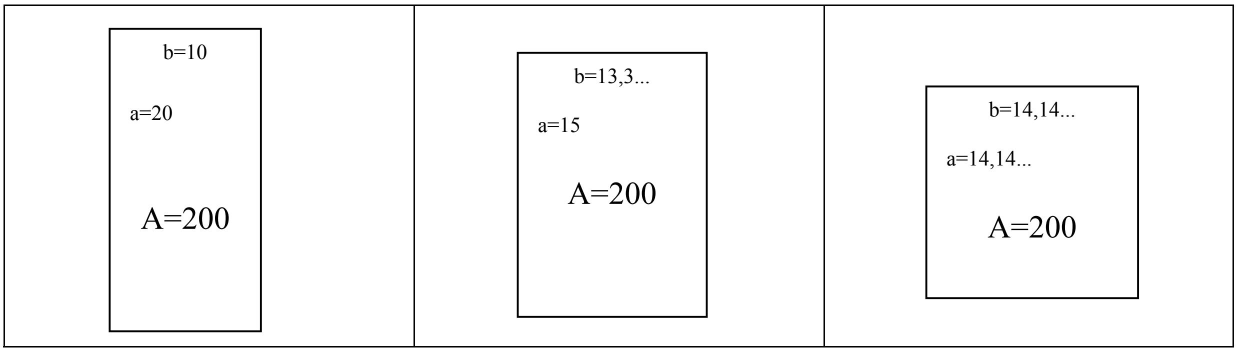


Bild 16 Bild 17 Bild 18

Bei Einsatz eines Geometrieprogramms lässt sich die sukzessive Umwandlung des gegebenen Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat mit dem Zugmodus dynamisch veranschaulichen.
Verkürzt man die längere Seite des Ausgangsrechtecks nach eigener Wahl, so bleibt zu klären, wie lang die kleinere Seite werden muss, damit der Flächeninhalt unverändert bleibt. Es liegt auf der Hand, dass der Flächeninhalt 200 durch die Länge der gewählten Seite dividiert werden muss:

$$b = \frac{200}{a}\,.$$

Hier liegt erkennbar ein Algorithmus in der Luft, aber noch stört, dass über die Seitenveränderung jedes Mal neu entschieden werden muss. Wie lässt sich das Wahlverfahren unabhängig vom Durchführenden automatisieren? Offensichtlich befindet sich doch der jeweils neue Wert zwischen den beiden Seitenlängen, man könnte sich folglich auf eine „Mittelzahl“ einigen. Eine kurze wiederholende Erarbeitung des (arithmetischen) Mittelwertes an dieser Stelle ermöglicht so die Formulierung des Heron - Algorithmus:

$$x_{neu} = \tfrac{1}{2}(x_{alt} + y_{alt})\,,$$

wobei gelten muss: $x_{alt} \cdot y_{alt} = 200$, wenn x_{alt} und y_{alt} die Kantenlängen des jeweils letzten veränderten Rechtecks angeben. Damit folgt: $y_{alt} = \frac{200}{x_{alt}}$, also:

$$\boxed{x_{neu} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(x_{alt} + \frac{200}{x_{alt}} \right)}$$

Schematisch lässt sich das wie folgt veranschaulichen:

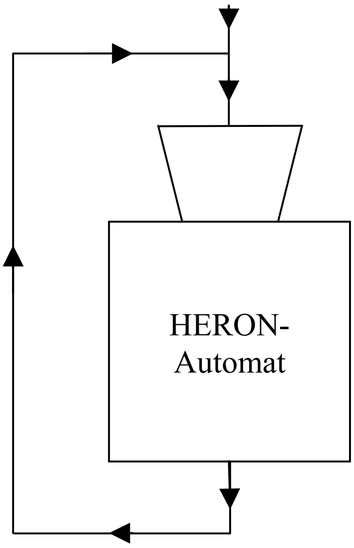


Bild 19

In 2 bis 3 Schritten sollte die Heron-Iteration von den Schülerinnen und Schülern händisch ausgeführt werden.

Die Berechnung der Iterationswerte mit dem „HERON-Automaten“ unter Zuhilfenahme des Voyage 200 liefert im Exaktmodus Brüche mit beängstigend anwachsenden Zählern und Nennern, was die Frage aufwirft, ob es denn überhaupt einen Bruch gibt, der das gestellte Ausgangsproblem $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 200$ exakt löst (vgl. Bilder 20 - 22).

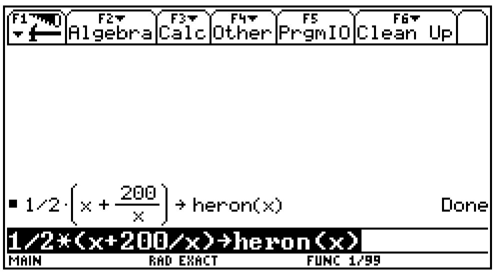


Bild 20

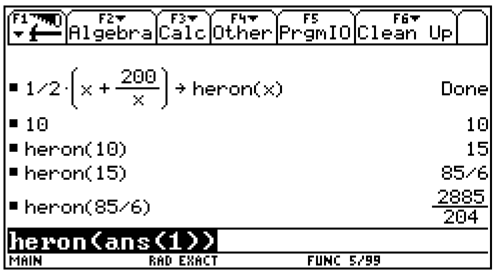


Bild 21

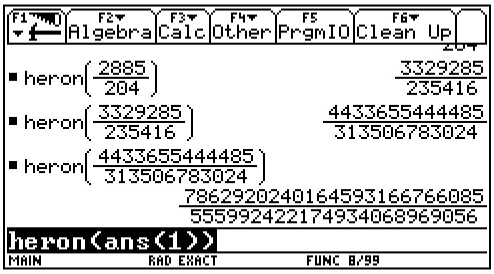


Bild 22

Hinweis: "ans" sorgt dafür, dass das letzte Resultat als neuer Variablenwert in die Iterationsformel eingesetzt wird. Hier wird der Rückkopplungsgedanke deutlich.

Auch mit dem TI 83 kann die Iteration im Home-Modus durchgeführt werden:

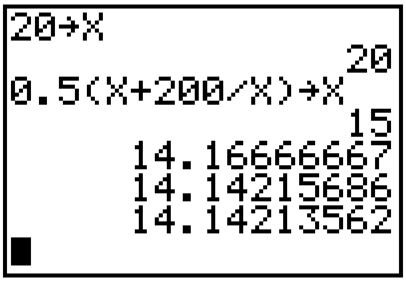


Bild 23

Diese Vorgehensweise (Bild 23) verdeutlicht die jeweilige Neuzuweisung eines Variablenwertes auf denselben Speicherplatz, was für ungeübte Schülerinnen und Schüler erfahrungsgemäß gewöhnungsbedürftig ist und daher zumindest angesprochen werden muss. Besser wäre daher eine Iteration im Folgenmenü.

Parallel zu dieser rein rechnerischen Iteration kann sie auch mithilfe des Web-Diagramms veranschaulicht werden (Bild 24).

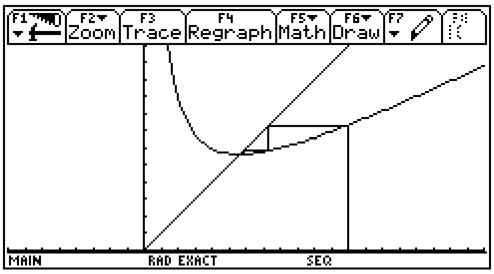


Bild 24

Mit dem Rückgriff auf die Frage der Quadratflächenverdopplung wird nun die Definition der Wurzel akut. Als vorläufige Definition kann etwa die folgende Formulierung verwendet werden:

$$\sqrt{200} = x \Rightarrow x^2 = 200; \quad (x > 0)$$

oder in Worten:

Wurzel aus 200 ist diejenige (positive) Zahl x, die zum Quadrat genommen 200 ergibt.

Eine Verknüpfung dieser Definition mit dem geometrischen Zusammenhang zwischen Quadratflächeninhalt und -kantenlänge ist dabei unverzichtbar,

oder geometrisch formuliert:

***Wurzel aus 200 ist die Kantenlänge eines Quadrates mit dem Flächeninhalt 200*.**

Diese Definition am Beispiel lässt sich ohne Schwierigkeiten verallgemeinern, ohne zunächst noch die Frage nach der Positivität der Wurzel (und des Radikanden) aufzuwerfen.

Das Zustandekommen der Web-Darstellung könnte an dieser Stelle als auf dem Wege liegende Erweiterung behandelt werden.

6.2.3 Einstieg: Iteratives Wurzelziehen

Ziele

Ausgehend von einem Flächenverwandlungsproblem soll die Annäherung an irrationale Zahlen problematisiert werden. Am Beispiel des Heron-Verfahrens als Verfeinerung der Bisektion geht es dann um die Ermittlung, Beschreibung und Anwendung eines Algorithmus zur Bestimmung von Wurzeln. Am Ende soll der Begriff der Wurzel definiert werden.

Die unterschiedlichen Verfahren (z. B. Heron) werden mit einem geeigneten „Rechner“ (GTR, CAS, Tabellenkalkulation) durchgeführt, bis keine Veränderung mehr bei der Folge der Näherungswerte angezeigt wird. Eine Antwort auf die Frage der weiteren Nachkommastellen kann das jeweilige Gerät bzw. Verfahren nicht geben. Die Frage, was ist $\sqrt{12}$ oder $\sqrt{2}$ für eine Zahl, ist durch numerische Verfahren nicht zu lösen, weil Rechner nur mit einer endlichen Zahl von Stellen arbeiten.

Die Verfahren sind aber im Prinzip beliebig fortsetzbar, so dass eine beliebig genaue Annäherung der gesuchten Wurzel durch rationale Zahlen gedanklich möglich ist.

Vernetzungsmöglichkeiten

Baustein (3.3.5) „Von der Konstruierbarkeit zur Berechenbarkeit“

Bei der geometrischen Bestimmung von „Wurzeln" können Grenzen wegen der beschränkten Messgenauigkeit aufgezeigt werden.

1. + 2. Stunde

Einstiegsaufgabe

1. Zeichne mindestens 6 verschiedene Rechtecke vom Flächeninhalt 12. Stelle deine Seitenlängen in einer Tabelle dar. Erweitere die Tabelle durch neue Beispiele, ohne zu zeichnen.
2. Gibt es auch die Möglichkeit, ein Quadrat mit dem angegebenen Flächeninhalt zu finden? Versuche zu zeichnen. Wie kann man das Quadrat in der Tabelle erkennen? Beschreibe dein Vorgehen.

Durch systematisches Probieren können die Schülerinnen und Schüler auf eine dezimale Intervallschachtelung oder Bisektion (Intervallhalbierungsmethode) kommen. Dies sollte in einem offenen Unterrichtsgespräch diskutiert werden.

Als Erweiterung dieses Einstiegs besteht die Möglichkeit, die Bisektionsmethode ggf. mithilfe von Listen und einem Programm durchzuführen (siehe Anlage 1).

3. + 4. Stunde

1. Ausgangspunkt sind die gesammelten Ergebnisse. Das Verfahren zur Systematisierung wird nun vorgegeben:
   Ausgehend vom Rechteck mit den Seitenlängen 2 und 6 soll von den Schülerinnen und Schülern jeweils ein weiteres Rechteck gefunden werden, dessen eine Seite der Mittelwert der Rechteckseiten des vorangegangenen Rechtecks ist. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle gesammelt und gedeutet.
2. In einer Ergebnissicherung werden Art des Verfahrens, Abbruchbedingung und Formalisierung des Verfahrens deutlich.
   Mögliche Ergebnisse:
   Der Mittelwert liefert einen ersten Näherungswert, d. h. die eine Kantenlänge des Rechtecks wird zu: $a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}$.
   Die 2. Kante wird so bestimmt, dass der Flächeninhalt wieder A wird: $a_4 = \frac{A}{a_2}$ usw.

Die Schritte lassen sich zusammenfassen zur Iterationsvorschrift: $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right)$ mit

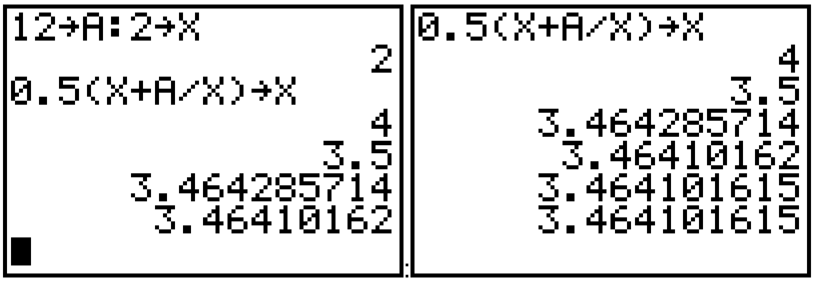
$x_0 = a_1$ als Startwert.

Es handelt sich um eine „verbesserte Bisektionsmethode“.

<u>Umsetzung auf GTR</u>

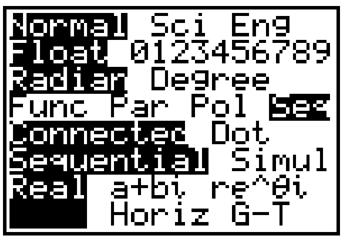
Eine der beiden folgenden Möglichkeiten sollte mindestens gewählt werden:

a) Durchführung auf dem Home-Bildschirm des Taschenrechners mit der Möglichkeit, den Flächeninhalt (A) und den Startwert (X) zu verändern:

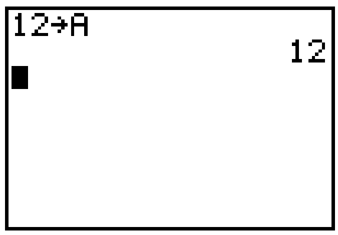


Durch mehrmalige Betätigung der „ENTER“-Taste kann man beliebig viele Näherungswerte erzeugen, bis keine Veränderung an den angezeigten Stellen zu beobachten ist.

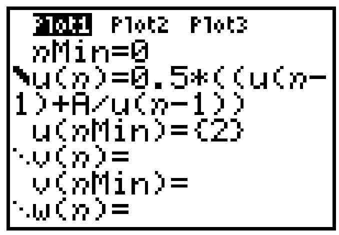
b) Iterative Bearbeitung mit Festhaltung der Ergebnisse in Listen mit der Möglichkeit, grafische Darstellungen über den Folgeneditor zu erzeugen:



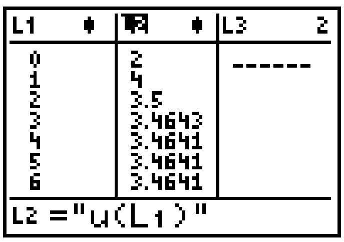
Mode-Einstellungen

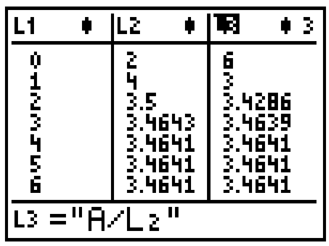


Speicherung des Flächeninhalts

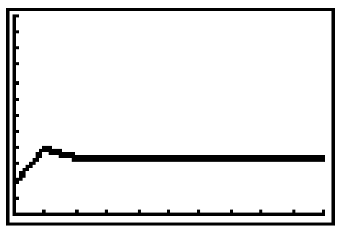


Eingabe der Iterationsvorschrift





Übertragung der Iterationswerte in Liste L2 und L3



die 2. Seitenlänge
Darstellung von u (n)

In jedem der beiden Fälle a) und b) sollen die Schülerinnen und Schüler durch weitere Zahlenbeispiele erkennen, dass es eine Zahl $\sqrt{a}$ gibt mit $a \geq 0$, deren Quadrat a ist. Die Taschenrechner-Taste „$\sqrt{\ }$" liefert - wie unser Verfahren - einen auf endlich viele Stellen gerundeten Wert.

Erweiterung

Die Methode b) könnte auch mit einer Tabellenkalkulation durchgeführt werden. Der Zeitaufwand ergibt sich daraus, ob eine Einführung in die Arbeitsweise einer Tabellenkalkulation hier erfolgt oder bereits in anderen Bausteinen erfolgt ist.

Möglicherweise könnten auch 3. Wurzeln iterativ nach eine abgewandelten Form des Heron-Verfahrens ermittelt werden.

Hinweis zur Methode

Das Volumen V einer quadratischen Säule ist vorgegeben. Gesucht ist ein volumengleicher Würfel. Daraus ergibt sich folgende Iterationsformel für die Kantenlänge x eines Würfels:

$x_n = \frac{1}{3}\left(2x_{n-1} + \frac{V}{(x_{n-1})^2}\right)$ mit $x_0 = a$ als Startwert.

6.2.4 Spiel mit $\sqrt{2}$

In dieser Stunde sollen die dezimalen Darstellungen zweier rationaler Zahlen und die dezimale Darstellung der Zahl $\sqrt{2}$ auf 10000 Nachkommastellen gerundet mithilfe eines Texteditors auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur Hinführung auf die verschiedenen Eigenschaften der Elemente der Menge rationaler und reeller Zahlen untersucht werden.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- durch Betrachten der Dezimaldarstellungen formulieren können, dass es sich bei den Zahlen um nichtabbrechende Dezimalzahlen handeln kann, dass zwei Zahlen in den ersten neun Nachkommastellen übereinstimmen und dass eine Zahl mit der durch das Heron-Verfahren bestimmten Zahl in den Nachkommastellen übereinstimmt
- mithilfe der Suchfunktion des Texteditors bestimmen können, dass zwei Zahlen eine Periode unterschiedlicher Länge besitzen und dass bei einer Zahl keine Periode ermittelbar ist

- begründen können, dass die als periodisch erkannten Zahlen zu der Menge der rationalen Zahlen gehören und dass die andere Zahl möglicherweise nicht in die ihnen bekannten Mengen einzuordnen ist
- formulieren können, dass zum sicheren Ausschluss der nur endlich dargestellten Zahl aus der Menge der rationalen Zahlen ein anderes Verfahren benötigt wird.

Durchführung

Die Schülerinnen und Schüler erhalten drei Textdateien mit der dezimalen Darstellung der Zahlen $\frac{1}{499}$ (Zahl 1), $\frac{27720}{19601}$ (Zahl 2) und $\sqrt{2}$ (Zahl 3) auf jeweils 10000 Nachkommastellen gerundet (siehe Anlage 2).

Arbeitsauftrag

Die Dateien Zahl1.txt, Zahl2.txt und Zahl3.txt enthalten jeweils die Dezimaldarstellung dreier Zahlen auf 10000 Nachkommastellen gerundet. Öffne die Dateien mit einem Texteditor und untersuche die Zahldarstellungen auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Notiere deine Vermutungen und Ergebnisse in einer Tabelle mit jeweils einer Spalte pro Zahl.

Erwartete Schülerleistungen

Zahl 1	Zahl 2	Zahl 3
nichtabbrechende Dezimalzahl	nichtabbrechende Dezimalzahl	nichtabbrechende Dezimalzahl
keine Übereinstimmung mit Zahl 2 und Zahl 3	stimmt in acht Nachkommastellen mit Zahl 3 überein	stimmt in acht Nachkommastellen mit Zahl 2 überein
keine Übereinstimmung	stimmt in acht Nachkommastellen mit der durch das Heron-Verfahren bekannten Zahl überein	stimmt mit der durch das Heron-Verfahren bekannten Zahl in den Nachkommastellen überein
periodische Zahl	periodische Zahl	keine Periode ermittelbar
Periodenlänge größer als bei Zahl 2	Periodenlänge kleiner als bei Zahl 1	kein Vergleich möglich
rationale Zahl	rationale Zahl	

Die Gruppenergebnisse werden verglichen und gegebenenfalls korrigiert bzw. ergänzt. Die in der Tabelle fehlende Zuordnung der Zahl 3 zu einer bekannten Zahlenmenge wird problematisiert, so dass deutlich wird, dass zu einem endgültigen Ausschluss der Zahl 3 aus der Menge der rationalen Zahlen ein anderes Verfahren notwendig ist.

Hausaufgabe

Formuliere schriftlich und in vollständigen Sätzen die Definition der Menge der rationalen Zahlen und die Eigenschaften der rationalen Zahlen.

6.2.5 Begründung der Irrationalität von $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{10}$

(Gruppenarbeit, verschiedene Beweise)

In dieser Stunde sollen sich die Schülerinnen und Schüler in Gruppen mit unterschiedlichen Betrachtungen zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{10}$ auseinandersetzen. Dabei spannt sich der Bogen von Betrachtungen der Primfaktorenzerlegung bis zum klassischen Beweis, der in ähnlicher Form auch in verschiedenen Schulbüchern zu finden ist.

In den vorausgehenden Stunden haben die Schülerinnen und Schüler an der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ mit 10000 Nachkommastellen festgestellt, dass keine Periode zu finden ist. Anhand der folgenden Betrachtungen soll nun geklärt werden, dass sich $\sqrt{2}$ tatsächlich nicht als Bruch darstellen lässt.

Beispiel A

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m,n \in \mathbf{N}$,

daraus würde folgen: (*) $m^2 = 2\, n^2$.

Die natürlichen Zahlen m und n lassen sich in Primfaktoren zerlegen.

Otto stellt fest: Jeder Faktor, der in der Primfaktorzerlegung von n bzw. m vorkommt, tritt in der Primfaktorzerlegung von n^2 bzw. m^2 in doppelter Anzahl auf.

Also gibt es auf der linken Seite von (*) eine gerade Anzahl von Primfaktoren, auf der rechten Seite aber eine ungerade.

Also kann die Gleichung (*) nicht erfüllbar sein.

Beispiel B

Wenn $\sqrt{10}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten: $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$, mit $m,n \in \mathbf{N}$,

daraus würde folgen: (*) $m^2 = 10 \cdot n^2$.

Susanne behauptet nun, dass bei einer Quadratzahl, deren letzten Stellen aus Nullen bestehen, die Anzahl dieser Nullen gerade sein muss.

Darauf stellt Jens fest, dass die Zahl $10 \cdot n^2$ eine ungerade Anzahl von Nullen als letzte Stellen haben muss.

Also kann die Gleichung (*) nicht erfüllbar sein.

Beispiel C

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m,n \in \mathbf{N}$ teilerfremd, d. h. der Bruch kann nicht mehr gekürzt werden,

dann wäre: (*) $m^2 = 2\,n^2$.

Amelie hat einige Zahlen quadriert und festgestellt, dass als letzte Ziffer nur die 0, 4, 5, 6 und 9 auftreten. Wenn man die Quadratzahl dann mit 2 multipliziert, treten nur noch die Endziffern 0, 2 und 8 auf. Schade, meint Stefan, wenn die dumme Null nicht wäre, wäre doch klar, dass m^2 nicht $2\,n^2$ sein kann.

Darauf fragt Anna: Kann man den Bruch dann nicht kürzen?

Beispiel D

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten:	(*)	$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m,n \in \mathbf{N}$ teilerfremd,
dann wäre:	(**)	$m^2 = 2\,n^2$,
dann müsste gelten:	(1)	m^2 ist eine gerade Zahl,
daraus folgt:	(2)	m muss ebenfalls gerade sein,
	(3)	also gibt es eine natürliche Zahl p mit ,m = 2 p,
aus (**) folgt dann:	(4)	$4\,p^2 = 2\,n^2$,
	(5)	$2\,p^2 = n^2$, also muss auch n gerade sein,
	(6)	also sind n und m nicht teilerfremd.

Daraus folgt, dass (*) nicht erfüllbar ist.

Zu den einzelnen Beispielen gibt es jeweils ein Arbeitsblatt (siehe Anlagen zu 4.1). Die Arbeitsaufträge fordern zu einer Begründung der einzelnen Schritte auf. Sollte das für einzelne Schritte nicht möglich sein, sind die Probleme bzw. Schwierigkeiten von den Schülerinnen und Schüler möglichst genau zu beschreiben.

Die Gruppenarbeit sollte möglichst in Form eines Gruppenpuzzles organisiert werden. Dabei wird die Klasse in Gruppen von 3 - 4 Schülerinnen und Schüler aufgeteilt. Die einzelnen Gruppen bearbeiten eine der gegebenen Aufgabenstellungen. Anschließend werden die Gruppen neu aufgeteilt, so dass in jeder neuen Gruppe ein „Experte" für jede Aufgabenstellung vertreten ist. Die „Experten" stellen den anderen Schülerinnen und Schülern die Ergebnisse vor, die in der 1. Gruppe erarbeitet worden sind.

Wenn dies auf Grund der Klassenstärke bzw. -zusammensetzung ungünstig ist, können die Arbeitsaufträge in konventioneller Gruppenarbeit bearbeitet werden.

Sollte das Beispiel D, bei dem der formale Beweischarakter sehr hervortritt, im Unterrichtszusammenhang als ungeeignet angesehen werden, kann darauf verzichtet werden.

<u>Hausaufgabe</u>

Untersuche, ob die einzelnen Betrachtungen auf andere Wurzeln, wie z. B. $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$ übertragbar sind.

6.2.6 Begründung der Irrationalität über Kettenbrüche

<u>1. Stunde</u>

In dieser Stunde sollen Definition und Eigenschaften der Dezimaldarstellung gesammelt werden. Anschließend wird das Verfahren der Kettenbruchentwicklung für rationale Zahlen als weitere Darstellung der rationalen Zahlen eingeführt.

<u>Ziele</u>

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- die Definition der Menge der rationalen Zahlen und die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen angeben können
- das Verfahren der Kettenbruchentwicklung an einem Beispiel erläutern können
- das Verfahren der Kettenbruchentwicklung an ausgewählten Beispielen anwenden können.

<u>Durchführung</u>

In der Besprechung der Hausaufgaben werden Definition und Eigenschaften der Dezimaldarstellung im Unterrichtsgespräch zusammengetragen und gesichert. Anschließend wird das Verfahren der Kettenbruchentwicklung am Beispiel der Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{7}{4}$ an der Tafel eingeführt:

$$\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6} = 1+\frac{2}{3} = 1+\frac{1}{\frac{3}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{7}{4} = 1{,}75 = 1+\frac{3}{4} = 1+\frac{1}{\frac{4}{3}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

Erwartete Schülerleistungen

Die Schülerinnen und Schüler erläutern an den Beispielen das Verfahren der Kettenbruchentwicklung. Sie sollen als Besonderheit der Darstellung der beiden Zahlen angeben können, dass sowohl die abbrechende als auch die periodische Dezimalzahl eine ähnliche Kettenbruchdarstellung hat.

Hausaufgabe

Stelle die Zahlen $\frac{11}{6}$ und $\frac{18}{13}$ als Kettenbrüche dar.

2. Stunde

In dieser Stunde wird als weitere Eigenschaft der rationalen Zahlen die immer abbrechende Kettenbruchentwicklung festgelegt und die Kettenbruchentwicklung für die Zahl $\sqrt{2}$ durchgeführt.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- erklären können, dass das Verfahren der Kettenbruchentwicklung bei rationalen Zahlen immer abbricht
- das Verfahren der Kettenbruchentwicklung für die Zahl $\sqrt{2}$ erläutern können
- durch einen Vergleich der Kettenbruchentwicklungen erklären können, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann.

Durchführung

In der Besprechung der Hausaufgabe soll am Beispiel der Kettenbruchentwicklung der Zahl

$$\frac{18}{13} = 1+\frac{5}{13} = 1+\frac{1}{\frac{13}{5}} = 1+\frac{1}{2+\frac{3}{5}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{3}}}$$

$$= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

durch Betrachtung der Reste $\frac{5}{13}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ gefolgert werden, dass bei diesem Verfahren die Zähler immer kleiner sind als die Nenner und dass die Nenner immer abnehmen. Folglich muss die Entwicklung immer abbrechen.

Anschließend soll die Kettenbruchentwicklung der Zahl $\sqrt{2}$ entwickelt werden. An der Tafel wird aus dem Ansatz

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$$

gefolgert

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad 1+\sqrt{2} = 2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Jetzt wird in Gleichung I der Nenner mithilfe von Gleichung II ersetzt, so dass sich ergibt:

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+....}}}}$$

Es wird ersichtlich, dass die Kettenbruchentwicklung nicht abbricht. Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.

<u>Hausaufgabe</u>

Berechne aus dem Ansatz $\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)=1$ die Kettenbruchdarstellung für $\sqrt{10}$.

Formuliere einen Ansatz für die Kettenbruchentwicklung der Zahl $\sqrt{17}$ und führe sie durch.

6.2.7 Konstruktion und qualitativer Vergleich von *Q* und *R*

In dieser Stunde werden weitere irrationale Zahlen konstruiert, bevor die Menge der reellen Zahlen definiert und in einem Vergleich mit der Menge der rationalen Zahlen von dieser abgegrenzt wird.
Der Verlauf hängt von der in den Vorstunden durchgeführten Begründung der Irrationalität ab.
Geht man den Weg wie in 6.2.6 beschrieben, so gibt die Besprechung der Hausaufgaben die Gelegenheit, festzustellen, ob es den einzelnen Experten gelungen ist, ihr Wissen an die anderen Schülerinnen und Schüler weiterzugeben. Nach der Vorstellung einzelner Betrachtungen bietet sich die Möglichkeit, im Unterrichtsgespräch eventuelle Lücken oder Unklarheiten aufzuarbeiten.

Wurde der Weg über die Kettenbrüche beschritten, so sollen die Schülerinnen und Schüler das Verfahren der Kettenbruchentwicklung auf irrationale Zahlen anwenden und insbesondere den Ansatz erläutern, sowie aus der Kettenbruchentwicklung schlussfolgern können, dass $\sqrt{10}$ und $\sqrt{17}$ keine rationalen Zahlen sind.

In diesem Fall werden in der Hausaufgabenbesprechung folgende Ergebnisse erwartet:

$$\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)=1$$

$$\sqrt{10} = 3+\frac{1}{3+\sqrt{10}} \quad \text{und} \quad 3+\sqrt{10} = 6+\frac{1}{3+\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{10} = 3+\frac{1}{3+\sqrt{10}} = 3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\sqrt{10}}} = 3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+....}}}$$

und aus

$$\left(\sqrt{17}-4\right)\left(\sqrt{17}+4\right)=1$$

folgt

$$\sqrt{17} = 4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+....}}}$$

Nach der Erläuterung des Ansatzes werden die Kettenbruchentwicklungen verglichen und die Schülerinnen und Schüler schlussfolgern, dass auf Grund der nichtabbrechenden Entwicklungen die beiden Zahlen nicht rational sind.

Unabhängig von der bisherigen Vorgehensweise sollen die Schülerinnen und Schüler im Folgenden

- die Definition der irrationalen Zahlen angeben können
- weitere irrationale Zahlen in Dezimaldarstellung konstruieren können
- formulieren können, dass die Menge der rationalen Zahlen durch die Hinzunahme der unendlichen Menge aller nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalzahlen zu der Menge der reellen Zahlen erweitert wird.

<u>Durchführung</u>

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, weitere nicht rationale Zahlen zu finden.

Sie werden vermutlich weitere Wurzeln aus natürlichen Zahlen nennen und nicht-periodische und nicht-abbrechende Dezimalzahlen konstruieren (z. B.: 0,01001000100001...). Es sollen möglichst viele Zahlen und Konstruktionsmöglichkeiten genannt werden, damit sich aus der Vielfalt ergibt, dass zu der Menge der rationalen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen hinzukommen. Dieses Ergebnis muss gesichert werden.

Nun werden die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Zahlen als irrationale Zahlen definiert und als neue Zahlenmenge die Menge der reellen Zahlen als die Menge aller Zahlen auf dem Zahlenstrahl definiert.

6.2.8 Wurzelgesetze und Übungen

Die Betrachtung zu Näherungswerten in dem ersten Teil dieses Bausteins und ggf. der Umgang mit Wurzeln in anderen Bausteinen (3.3.4, 3.3.5, 3.3.8) führt zu einer selbstverständlichen Übertragung der Rechengesetze in **Q** auch auf die „neuen Zahlen“. Dies wird auch im Folgenden nicht besonders thematisiert, wenn sich auch an mehreren Stellen die Möglichkeit bietet, darauf hinzuweisen.

An dieser Stelle werden grundlegende Regeln für den Umgang mit Wurzeln erarbeitet und einige spezielle Vorgehensweisen betrachtet. Die hier im Sinne eines Minimalvorschlags notwendig erscheinenden Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich ebenso wie mögliche Zugänge teilweise unter Bezug auf die eingesetzten Technologien. Sie sind im Folgenden gesondert aufgeführt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen am Ende der geplanten Stunden die Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln und Wurzeltermen beherrschen und anwenden können.

<u>Multiplikation</u>

Zu Beginn der Stunde bekommen die Schülerinnen und Schüler Arbeitsaufträge zur Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Wurzeltermen. Diese sollten in Partnerarbeit bearbeitet werden. Die Arbeitsblätter unterscheiden sich je nach Rechnertyp.

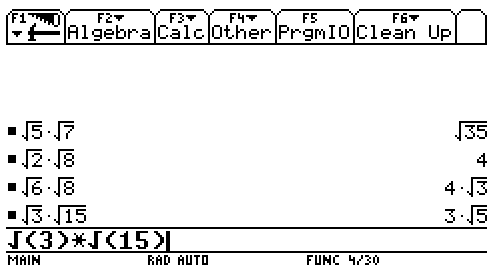
<u>Für Rechner mit CAS</u>

Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf.

Untersuche die Umformungen des Rechners.

Betrachte dabei auch weitere Beispiele und formuliere zugrundeliegende Regeln.

Versuche, diese zu begründen.



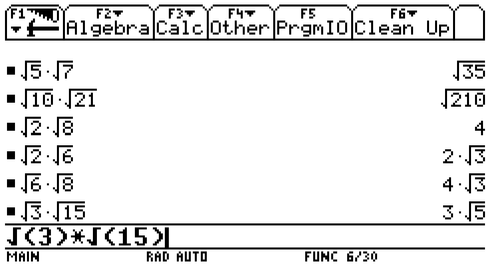
Für grafikfähige Taschenrechner

Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf.

Untersuche die Umformungen des Rechners.

Überlege dir weitere Beispiele und überprüfe durch Bestimmung von Näherungswerten mit dem GTR.

Formuliere zugrundeliegende Regeln und versuche, diese zu begründen.



Die Schülerinnen und Schüler stellen ihre Ergebnisse vor (Folie, Display, Tafel).

Mögliche Antworten:

- Angabe weiterer Beispiele.
- Wurzeln werden multipliziert, indem man die Radikanden[16] multipliziert.
- Ist der Radikand ein Produkt, so kann man die Wurzel aufteilen.
- Ist der Radikand eine Quadratzahl, so kann man die Wurzel vereinfachen.
- Besteht der Radikand aus einem Produkt aus Quadratzahl und weiteren Faktoren, so kann man teilweise „die Wurzel ziehen“.
- Begründungen der Multiplikationsregel über die Gleichheit der Quadrate.
- Teilweises Wurzelziehen zusätzlich über die Definition.

Im Anschluss erfolgt eine Formalisierung, möglicherweise in folgender Form:

Multiplikation	Man kann zwei Wurzeln multiplizieren, indem man die Radikanden multipliziert und dann die Wurzel zieht. Für alle $a \geq 0$, $b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
Teilweises Wurzelziehen	Besteht der Radikand aus einem Produkt aus Quadratzahl und weiteren Faktoren, so kann man teilweise die Wurzel ziehen. Für $a \geq 0$,$b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$

Bei der Begründung der Multiplikationsregel übertragen die Schülerinnen und Schüler intuitiv die Rechengesetze aus **Q** auf die Rechnung mit Wurzeln. Dieses ergibt sich aus den Untersuchungen zu

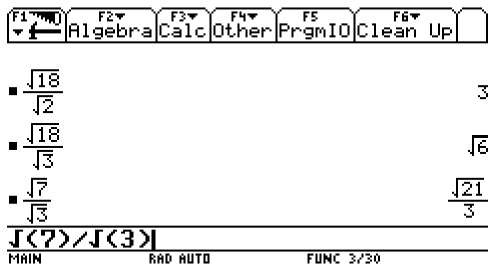
[16] Der Begriff Radikand soll an dieser Stelle eingeführt werden, falls er noch nicht bekannt ist.

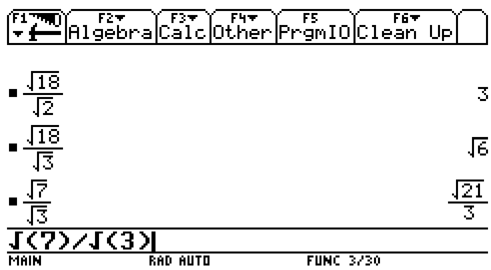
den reellen Zahlen und der Beschreibung durch Näherungsverfahren. Ein Hinweis kann hier exemplarisch erfolgen, sollte aber nicht vertieft werden.

<u>Erarbeitung weiterer Wurzelgesetze</u>

Die Erarbeitung weiterer Wurzelrechenregeln erfolgt in arbeitsteiliger Gruppenarbeit. Die einzelnen Gruppen (jeweils 3 bis 4 Schülerinnen und Schüler) erhalten jeweils ein Arbeitsblatt zur weiteren Untersuchung unterschiedlicher Wurzelterme. Die Präsentation der Ergebnisse erfolgt in „Expertengruppen“, die aus jeweils einer Schülerin/einem Schüler der ursprünglichen Kleingruppen neu zusammengesetzt werden. Je nach Größe der Lerngruppe werden die Arbeitsaufträge für die erste Gruppenarbeitsphase entsprechend mehrfach vergeben, die Gruppengröße für die zweite Phase ggf. etwas größer gewählt. Im Anschluss erfolgt die Formalisierung und Sicherung in der gesamten Lerngruppe.

Gruppe 1: Division

<u>Für Rechner mit CAS</u> Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf. Untersuche die Umformungen des Rechners. Betrachte dabei auch weitere Beispiele und formuliere zugrundeliegende Regeln. Versuche, diese zu begründen.	

<u>Für grafikfähige Taschenrechner</u> Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf. Untersuche die Umformungen des Rechners. Überlege dir weitere Beispiele und überprüfe durch Bestimmung von Näherungswerten mit dem GTR. Formuliere zugrundeliegende Regeln und versuche, diese zu begründen.	 Weitere Wurzelterme werden folgendermaßen umgeformt: $\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{7}} = \sqrt{11}$ $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}} = 6$ $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{78}}{6}$

Gruppe 2: Addition und Subtraktion

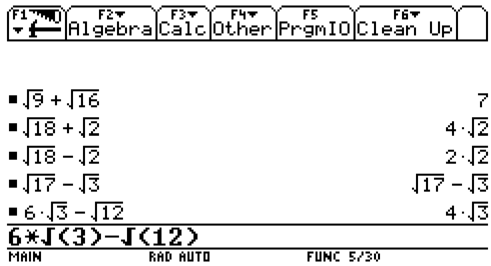
<u>Für Rechner mit CAS</u>

Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf.

Untersuche die Umformungen des Rechners.

Betrachte dabei auch weitere Beispiele und formuliere zugrundeliegende Regeln.

Versuche, diese zu begründen.



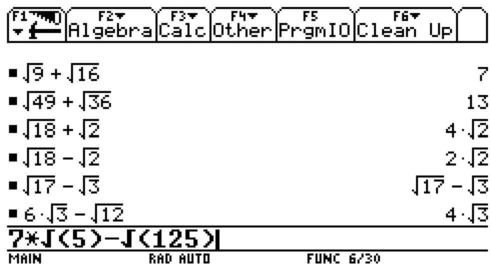
<u>Für grafikfähige Taschenrechner</u>

Beim Rechnen mit Wurzeln treten bei der Verwendung von CAS nebenstehende Umformungen auf.

Untersuche die Umformungen des Rechners.

Bearbeite das letzte Beispiel und überprüfe dieses und weitere Beispiele durch Bestimmung von Näherungswerten mit dem GTR.

Formuliere zugrundeliegende Regeln und versuche, diese zu begründen.



Gruppe 3: Zusammenhang Wurzelziehen - Quadrieren

Führe für die Zahl 12 jeweils nacheinander folgende Anweisungen aus:

- Ziehe zunächst die Wurzel und quadriere dann das Ergebnis.
- Quadriere zuerst und ziehe dann die Wurzel aus dem Ergebnis.

Führe diese Anweisungen (falls möglich) für andere rationale Zahlen durch.

Notiere deine Ergebnisse in Form einer Tabelle und vergleiche.

Formuliere für beide Fälle eine Regel.

Gruppe 4: Definitionsmenge

Gegeben sind folgende Wurzelterme:

$$\sqrt{7-x}\ ,\quad \sqrt{x-7}\ ,\quad \sqrt{-a^2}\ ,\quad \sqrt{(x-137{,}58)^2}$$

Überprüfe, welche Zahlen für die Variable eingesetzt werden dürfen und beschreibe die Menge der Zahlen möglichst genau.

Im Anschluss an die „Expertenrunde“ erfolgt die Zusammenfassung und Formalisierung der Wurzelgesetze und -rechenregeln in der Lerngruppe. Da dies sicher nicht vollständig in dieser Stunde erfolgen kann, dienen die Hausaufgaben auch zur Feststellung der Effektivität der „Expertenrunden“. In der Folgestunde kann die weitere Sicherung im Wechselspiel mit der Besprechung der Hausaufgaben erfolgen.

Die Sicherung der Ergebnisse kann wie folgt durchgeführt werden:

Division	Man kann zwei Wurzeln dividieren, indem man die Radikanden dividiert und dann die Wurzel zieht. Für alle $a \geq 0$, $b > 0$ gilt: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
Addition/Subtraktion	Summen und Differenzen lassen sich nur bei „gleichen Wurzeln“ zusammenfassen. Für alle $a \geq 0$ und alle b, c gilt: $b \cdot \sqrt{a} + c \cdot \sqrt{a} = (b+c) \cdot \sqrt{a}$
Zusammenhang von Wurzelziehen und Quadrieren	Für alle a gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$. Für alle $a \geq 0$ gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$.
Umformung von Brüchen durch Kürzen und Erweitern: (Rationalmachen des Nenners)[17]	Besteht der Nenner eines Bruches aus einem Wurzelterm, so kann man durch geschicktes Erweitern die Wurzel aus dem Nenner entfernen.

Übungsaufgaben

Standardaufgaben findet man in jedem Lehrbuch. Diese können zur weiteren Übung eingesetzt werden, allerdings sollte eine sinnvolle Auswahl getroffen werden. Auch hier bietet es sich z. B. an, über

[17] Eine vertiefte Behandlung der im CAS auftretenden Umformung von Brüchen sollte nur von Schülerinnen und Schülern mit der Verwendung von CAS durchgeführt werden.

Gruppenarbeiten „Experten“ zu schaffen, die dann die Lösungswege anderen Schülerinnen und Schülern erläutern. Hierbei können z. B. auch Musterlösungen erstellt werden.
Interessant erscheinen besonders die folgenden Aufgabentypen:

- Prüfe die folgende Behauptung: Für alle x $\in$ **R** gilt:

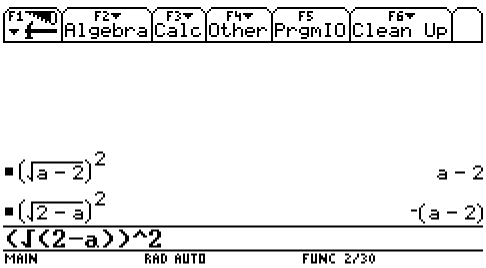
  a) $\sqrt{x^2} = x$

  b) $\sqrt{(-x)^2} = |-x|$

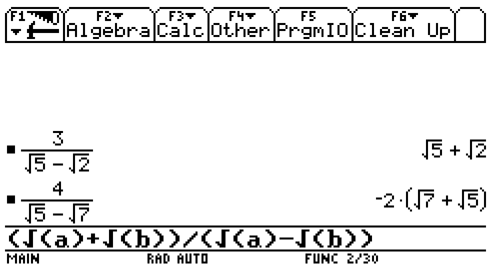
- Betrachte folgende Gleichung: $\sqrt{(a-4)^2} = 4 - a$.

  Überprüfe ihre Richtigkeit, indem du unterschiedliche Zahlen für a einsetzt. Für welche a ist diese Gleichung allgemein richtig? Begründe.

- Untersuche folgende Umformungen. (Setze zunächst für a verschiedene Zahlen ein.)



- Erkläre folgende Umformung (CAS):



6.2.9 Weitere Aufgaben

a) Bestimme $\sqrt{27}$ mit einem Näherungsverfahren deiner Wahl auf 5 Stellen. Erkläre die einzelnen Schritte und stelle das Ergebnis grafisch dar.

b) Das babylonische Iterationsverfahren arbeitet mit der Iterationsvorschrift $x_n = x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1})^2 - A}{2 \cdot x_{n-1}}$

   zur Bestimmung von $\sqrt{A}$.

   Bestimme $\sqrt{35}$ auf 5 Stellen. Vergleiche mit den Werten des Heron-Verfahrens und begründe deine Vermutung.

c) Gegeben ist das folgende Iterationsverfahren:

   $x_n = \dfrac{1}{3}\left(2 \cdot x_{n-1} + \dfrac{A}{x_{n-1}}\right)$. A sei wieder der Flächeninhalt. Bestimme eine Folge von Näherungswerten und vergleiche mit dem Heron-Verfahren.

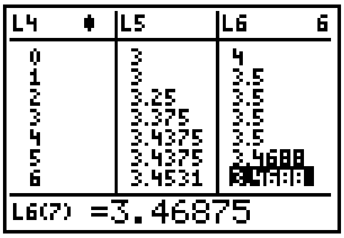
6.2.10 Anlagen

zu 2.2

1. Quelltext des Programms zur Bisektionsmethode:

```
Input "WURZEL VON: ",W
Input "SCHRITTE: ",K
Input "STARTWERT: ",S
0→Z
Z→L4(1)
S→L5(1)
S+1→L6(1)
For(I,1,K)
Z+1→Z
Z→L4(I+1)
(L5(I)+L6(I))/2→M
If M*M<W
Then
M→L5(I+1)
L6(I)→L6(I+1)
Else
M→L6(I+1)
L5(I)→L5(I+1)
End
End
```

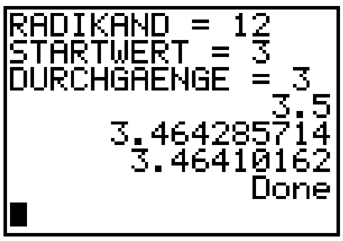
Die Listenwerte ergeben sich durch mehrfache Mittelwertbildung mit der Entscheidung, ob der neue Mittelwert die linke oder rechte Bereichsgrenze des neuen Lösungsintervalls ist. Eine der beiden Grenzen ändert sich nicht. Die Intervallbreiten erfüllen die Bedingung $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, wobei n die Anzahl der Schritte ist.



Bisektion mit den Startwerten 3 und 4

2. Quelltext des Heron-Programms:

```
Input "RADIKAND = ",R
Input "STARTWERT = ",X
Input "DURCHGAENGE = ",D
0→I
While I<D
0.5*(X+R/X)→W
Disp W
W→X
I+1→I
End
```



Das Programm berechnet eine einzugebene Anzahl von Näherungen auf den Home-Bildschirm.

zu 3

Die Textdateien Zahl1.txt, Zahl2.txt und Zahl3.txt können mit einem Computeralgebrasystem erzeugt werden.

<u>Mupad:</u>

`DIGITS:=10000` ; setzt die Anzahl der Nachkommastellen auf 10000

`float(1/499)` ; erzeugt die Dezimalzahl Zahl1

Die Dezimaldarstellung kann dann markiert, kopiert und in einen Texteditor (z. B. Notepad) eingefügt werden.

<u>Derive:</u>

`Approx(1/499,10000)` ; erzeugt die Dezimalzahl Zahl1 auf 10000 Nachkommastellen

Die Dezimaldarstellung kann dann markiert, kopiert und in einen Texteditor (z. B. Notepad) eingefügt werden.

Die Untersuchung der Zahlendarstellung auf Periodizität kann durch Markieren der zu suchenden Zahlensequenz und anschließendem Einfügen dieser Sequenz unter dem Menü *Bearbeiten .... Suchen* erfolgen.

$\sqrt{2} \approx$ 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784
621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358
314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059702745345968620147285
174186408891986095523292304843087143214508397626036279952514079896872533965463318
088296406206152583523950547457502877599617298355752203375318570113543746034084988
471603868999706990048150305440277903164542478230684929369186215805784631115966687
130130156185689872372352885092648612494977154218334204285686060146824720771435854
874155657069677653720226485447015858801620758474922657226002085584466521458398893
944370926591800311388246468157082630100594858704003186480342194897278290641045072
636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967504018369868
368450725799364729060762996941380475654823728997180326802474420629269124859052181
004459842150591120249441341728531478105803603371077309182869314710171111683916581
726889419758716582152128229518488472089694633862891562882765952635140542267653239
694617511291602408715510135150455381287560052631468017127402653969470240300517495
318862925631385188163478001569369176881852378684052287837629389214300655869568685
964595155501644724509836896036887323114389415576651040883914292338113206052433629
485317049915771756228549741438999188021762430965206564211827316726257539594717255
934637238632261482742622208671155839599926521176252698917540988159348640083457085
181472231814204070426509056532333398436457865796796519267292399875366617215982578
860263363617827495994219403777753681426217738799194551397231274066898329989895386
728822856378697749662519966583525776198939322845344735694794962952168891485492538
904755828834526096524096542889394538646625744927556381964410316979833061852019379
384940057156333720548068540575867999670121372239475821426306585132217408832382947
287617393647467837431960001592188807347857617252211867490424977366929207311096369
721608933708661156734585334833295254675851644710757848602463600834449114818587655
554286455123314219926311332517970608436559704352856410087918500760361009159465670
676883605571740076756905096136719401324935605240185999105062108163597726431380605
467010293569971042425105781749531057255934984451126922780344913506637568747760283
162829605532422426957534529028838768446429173282770888318087025339852338122749990
812371892540726475367850304821591801886167108972869229201197599880703818543332...

zu 4.1

Gruppenarbeitsblatt A

Für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ wird die folgende Betrachtung angegeben:

> Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.
>
> Dann müsste gelten: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbf{N}$
>
> Daraus würde folgen: (*) $m^2 = 2n^2$
>
> Die natürlichen Zahlen *m* und *n* lassen sich in Primfaktoren zerlegen.
>
> Otto stellt fest: „Jeder Faktor, der in der Primfaktorzerlegung von *n* bzw. *m* vorkommt, tritt in der Primfaktorzerlegung von n^2 bzw. m^2 in doppelter Anzahl auf".
>
> Also gibt es auf der linken Seite von (*) eine gerade Anzahl von Primfaktoren, auf der rechten Seite aber eine ungerade Anzahl.
>
> Also kann die Gleichung (*) nicht erfüllbar sein.
>
> Schaut euch die Betrachtung genau an. Gebt für jeden Schritt ausführliche Begründungen an. Macht euch Ottos Aussagen bezüglich der Primfaktoren an selbst gewählten Beispielen klar. Sollte euch dieses nicht für alle Schritte gelingen, so versucht, eure Schwierigkeiten genau zu beschreiben.

Beispiele für Primfaktorzerlegungen: 24 = 2*2*2*3
99 = 3*3*11

Gruppenarbeitsblatt B

Für die Irrationalität von $\sqrt{10}$ wird die folgende Betrachtung angegeben:

> Wenn $\sqrt{10}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.
>
> Dann müsste gelten: $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbf{N}$
>
> Daraus würde folgen: (*) $m^2 = 10 \cdot n^2$
>
> Susanne behauptet nun, dass bei einer Quadratzahl, deren letzten Stellen aus Nullen bestehen, die Anzahl dieser Nullen gerade sein muss.
>
> Darauf stellt Jens fest, dass die Zahl $10 \cdot n^2$ eine ungerade Anzahl von Nullen als letzte Stellen haben muss.
>
> Also kann die Gleichung (*) nicht erfüllbar sein.

Schaut euch die Betrachtung genau an. Gebt für jeden Schritt ausführliche Begründungen an. Macht euch Susannes Aussagen an selbst gewählten Beispielen klar. Sollte Euch dieses nicht für alle Schritte gelingen, so versucht, eure Schwierigkeiten genau zu beschreiben.

Gruppenarbeitsblatt C

Für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ wird die folgende Betrachtung angegeben:

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbf{N}$ teilerfremd, d. h. der Bruch kann nicht mehr gekürzt werden.

Dann wäre: (*) $m^2 = 2n^2$

Amelie hat einige Zahlen quadriert und festgestellt, dass als letzte Ziffer nur die 0, 4, 5, 6 und 9 auftreten. Wenn man die Quadratzahl dann mit 2 multipliziert, treten nur noch die Endziffern 0, 2 und 8 auf.

„Schade“, meint Stefan, „wenn die dumme Null nicht wäre, wäre doch klar, dass m^2 nicht $2n^2$ sein kann.“

Darauf fragt Anna: „Kann man den Bruch dann nicht kürzen?“

Schaut euch die Betrachtung genau an. Gebt für jeden Schritt ausführliche Begründungen an. Macht euch die Aussagen von Amelie, Stefan und Anna an selbst gewählten Beispielen klar. Was bedeutet es, wenn die Aussage von Anna richtig ist? Sollte Euch dieses nicht für alle Schritte gelingen, so versucht, eure Schwierigkeiten genau zu beschreiben.

Gruppenarbeitsblatt D

In einigen Mathematikbüchern findet sich der folgende Beweis:

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, müsste sie sich als Bruch darstellen lassen.

Dann müsste gelten: (*) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbf{N}$ teilerfremd

Dann wäre: (**) $m^2 = 2n^2$

Dann müsste gelten: (1) m^2 ist eine gerade Zahl

Daraus folgt (2) m muss ebenfalls gerade sein

(3) also gibt es eine natürliche Zahl p mit $m = 2p$

aus (**) folgt dann (4) $4p^2=2n^2$

(5) $2p^2=n^2$, also muss auch n gerade sein

(6) also sind n und m nicht teilerfremd.

Daraus folgt, dass (*) nicht erfüllbar ist.

Schaut euch die einzelnen Schritte des Beweises an. Begründet die Aussagen, die für euch nachvollziehbar sind.
Wenn euch das nicht gelingt, beschreibt den Punkt, den ihr nicht versteht, möglichst ausführlich.

6.2.11 Kontakt

Elmar Haberich	*haberich@yahoo.com*
Günter Heitmeyer	*guenter.heitmeyer@t-online.de*
Torsten Hesse	*hesse@greselius.net*
Wolfgang Hunze	*wolfgang.hunze@aol.com*
Jens Mestwerdt	*jens@mestwerdt.de*
Klaus-Peter Rötter	*klaus-peter.roettger@t-online.de*
Frauke Seeger	*fraukeseeger@t-online.de*
Hans-Dieter Stenten-Langenbach	*stenten-langenbach@t-online.de*
Jens Wilmes	*jens.wilmes@greselius.net*
Wulf Winter	