3 Lineare Zusammenhänge

3.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „3.2.9 Lineare Zusammenhänge"

Sachprobleme führen häufig auf lineare Zusammenhänge. Durch Einbeziehen vielfältigen Datenmaterials sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, derartige Zusammenhänge numerisch durch Tabellen, grafisch durch Geraden und symbolisch durch lineare Funktionen darzustellen. Dabei sollen sie einen vollständigen Überblick über den Zusammenhang von Geraden und linearen Funktionen erhalten. Darüber hinaus soll deutlich werden, dass einerseits Lagebeziehungen von Geraden algebraisch erfasst und untersucht werden können und andererseits Gleichungen und Gleichungssysteme grafisch gelöst werden können.

In unterschiedlichen Anwendungssituationen werden Fragestellungen behandelt, die auf lineare Funktionen oder lineare Gleichungen führen.

Bei Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x + b$ soll experimentell untersucht werden, wie sich die Parameter m und b auf die Lage der Geraden auswirken. Dabei ist der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln sinnvoll. Der Einfluss der Skalierung auf den Zusammenhang zwischen Steigung und „Steilheit" muss deutlich werden.

Bei der Auswahl der Sachprobleme sind neben Situationen, die direkt einen linearen Zusammenhang erkennen lassen, auch solche zu bearbeiten, in denen lineare Regression das angemessene Verfahren ist. Letztere kann „nach Augenmaß", aber auch rechnergestützt erfolgen. Bei linearen Gleichungen sollen neben grafischen auch symbolische Lösungsverfahren erarbeitet werden. Die entsprechenden Techniken müssen eingeübt und die zu Grunde liegenden Termstrukturen sicher erkannt werden. Einfache lineare Gleichungen müssen die Schülerinnen und Schüler - auch mit Formvariablen - von Hand lösen können.

Betrachtet man Anwendungssituationen, die sich durch Geraden modellieren lassen, oder untersucht man Lagebeziehungen zwischen Geraden, so kommt man zu linearen Gleichungssystemen. Diese sollen der Situation angemessen tabellarisch, grafisch oder symbolisch gelöst werden. In diesem Zusammenhang reicht *ein* symbolisches Verfahren, z. B. das Gleichsetzungsverfahren aus.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
lineare Gleichungen aus Anwendungsproblemen lineare Funktionen mit der Gleichung y = m·x+b Graph, Steigung, Steigungsdreieck, y-Achsenabschnitt, Nullstelle Geradengleichung, Geradenscharen Ausgleichsgeraden durch Punktwolken lineare Gleichungen heuristische Strategie: Rückwärtsarbeiten beim Gleichungslösen lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen zwei Geraden: Lagebeziehungen (incl. „senkrecht stehen“), Schnittpunktbestimmung	VERNETZUNG Idee der Funktion, Proportionalität (3.2.7) Parametervariation bei Funktionen lineares Wachstum (3.3.10) DIDAKTIK/METHODIK Modellieren ERWEITERUNG lineare Iteration, lineares Wachstum lineare Optimierung Ungleichungen, Ungleichungssysteme Programmierung von Lösungsalgorithmen

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Hannover 2003, Seite 26)

3.2 Unterrichtseinheit „Lineare Zusammenhänge“

In der Abbildung werden zwei alternative Wege für diese Unterrichtseinheit aufgeführt:

Zugang über ein Bewegungsproblem

Darstellungsformen: Graph, Tabelle und Term

Bedeutung von m und b für den Graphen

Geradengleichung

Die Telefonrechnung - ein experimenteller Zugang zur Darstellung von linearen Zusammenhängen

Formalisierung der gewonnenen Erkenntnisse

Änderungsraten bei einem Füllvorgang

Berechnung der Steigung und des y-Achsenabschnitts

Lagebeziehungen von Geraden und Geradenscharen

senkrechte Geraden

gespiegelte Geraden

verschobene Geraden

Geraden mit der Gleichung $x = a$

Berechnung von Funktionswerten und Stellen zu vorgegebenen Funktionswerten, auch: Nullstellen

Grafisches und rechnerisches Lösen von Schnittproblemen

Ausstieg:

Ausgleichsgeraden durch Punktwolken

Gliederung

3.2.1 Die Telefonrechnung - ein experimenteller Zugang zur Darstellung von linearen Zusammenhängen

Einleitende Informationen

Der Schwerpunkt dieses Zugangs in die Thematik der Linearen Zusammenhänge liegt in einer offenen experimentellen Entdeckung der Bedeutung der Parameter beim Term der Linearen Funktionen. Da experimentelle Zugänge in ihren Verläufen zeitlich nicht konkret geplant werden können, haben wir hier keinen zeitlich vorstrukturierten Unterrichtsverlauf geplant, sondern möchten lediglich anhand ausgewählter Aufgaben Unterrichtsphasen vorgeben, in denen die genauen zeitlichen und auch methodischen Planungen auf die jeweilige Lerngruppe abzustimmen sind. In den erläuternden Texten finden sich vereinzelt methodische Hinweise, die lediglich als Anregung zu verstehen sind.

1. Unterrichtsphase

Einstiegsaufgabe

„Wir haben dir immer gesagt, dass du den billigsten Telefontarif wählen sollst!“
Die Eltern von Katja sind sauer. Dabei hat Katja für das abendliche Gespräch mit ihrer Freundin doch die billigste Vorwahlnummer vorgewählt. Dennoch behaupten ihre Eltern das Gegenteil. Zum Beweis legen sie ihr die Telefonrechnung vor.
Katja sucht wütend ihre abendlichen Gespräche der letzten Woche heraus und beginnt zu überlegen.

Datum	Uhrzeit	Dauer	Zielrufnummer	Tarifeinheiten	Nettogesamtbetrag
13.08	18:10:37	00:06:03	042123465	7	0,1533
14.08	18:15:21	00:12:04	042123465	13	0,2847
15.08	18:23:00	00:27:02	042123465	28	0,6351
16.08	18:14:23	00:13:23	042123465	14	0,4921
17.08	18:02:12	00:35:12	042123465	35	0,7665
18.08	18:45:01	00:45:13	042123465	46	1,0474
19.08	18:33:23	00:34:04	042123465	30	0,8345

Vertiefungsaufgaben

1. Katjas Freundin hat im Internet zwei Vorwahlnummern gefunden, die laut Angabe der Betreiber besonders günstig sein sollen. In der ersten Anzeige wird eine Einheit für 0,029 € angeboten, in der zweiten eine Einheit für 0,019 €. Vergleich diese Tarife mit Katjas Tarif.
2. Eine andere Freundin der beiden erzählt am nächsten Morgen von einem weiteren Vorwahlnummerntarif, der durch folgende Zuordnungsvorschrift angegeben ist: $y = 0{,}003 \cdot x \cdot x$. Die Freundin hält diesen Tarif für den besten. Was wird die kluge Katja antworten?

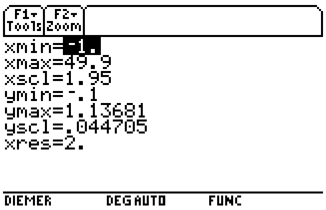
Wie oben beschrieben soll der erste Zugang experimentell stattfinden und ungefähr 4 Stunden dauern.	
Die Schülerinnen und Schüler erhalten in der ersten Stunde mit der Aufgabe 1 ein aus dem Alltag bekanntes Problem. Die vorgegebenen Daten entsprechen zu weiten Teilen realen Daten. Zwei der insgesamt sieben Werte weichen ab. Hierdurch ergeben sich für die Bearbeitung vielfältige Möglichkeiten. Kern der Bearbeitung sollte die Darstellung der Werte im Koordinatensystem sein, sowohl im Heft als auch mit dem TR sein. Die Aufgabenstellung ist bewusst offen formuliert, könnte aber je nach Lerngruppe konkretisiert werden.	Datenmaterial Darstellung im Koordinatensystem
Bei der Bearbeitung im Heft wird der lineare Zusammenhang zwischen den Werten erkannt und kann in Anlehnung an den Baustein „3.2.7 Zuordnungen, Proportionalität und Dreisatz" wiederholend aufgegriffen werden. Die Gerade durch den Kern der Punkte ergibt eine Ursprungsgerade, so dass die Anknüpfung an den Baustein 3.2.7 problemlos erfolgen kann. Gleichzeitig erkennt man die relevanten Einstellungen für Skalierungen, allerdings nicht den Term der entsprechenden Zuordnung.	Geradengleichungen

Das Einzeichnen der Geraden über den Taschenrechner durch Variation des Terms eröffnet ein breites Spektrum des Probierens. Für diese Phase des Unterrichts bietet sich die Partnerarbeit an, denn einerseits arbeiten die Schülerinnen und Schüler weitgehend eigenständig mit dem TR, andererseits benötigen sie einen gewissen Austausch an Ideen und Strategien. Durch dieses Probieren erkennen die Schülerinnen und Schüler eigenständig den Zusammenhang zwischen der Steilheit der Geraden und dem Faktor vor der Laufvariablen x. Möglicherweise arbeiten sie in dieser Phase noch nicht mit der Form $y = m \cdot x$ (sondern z. B. mit $y = x+x+x$). Im Sinne einer offenen Probierphase sollten solche Zuordnungsvorschriften aber zuerst zugelassen werden.	Geradenscharen Experimentelles Untersuchen der Parameter Bestimmung der Geraden durch einen Punkt und den Ursprung
Die beiden abweichenden Werte bieten im Anschluss an die Besprechung des erarbeiteten Zusammenhangs nun weitreichende Möglichkeiten der weiteren Untersuchung. Beide Punkte könnten als Werte zweier weiterer Tarife interpretiert werden, sie könnten auch zu einem Tarif gehören, der allerdings irgendeine Form von Grundgebühr beinhaltet. Je nach Lerngruppe könnte nun an dieser Stelle im Unterricht bereits hierzu der Term einer linearen Funktion, deren Graph nicht durch den Ursprung geht, bestimmt werden. Allerdings sollte auch dies rein experimentell durch Variation der entsprechenden Werte im y-Editor erfolgen. Bei der Bestimmung der Geraden durch die beiden abweichenden Punkte könnten natürlich ebenso unterschiedlichen Terme gebildet werden, deren Gleichheit an dieser Stelle auf anschauliche Weise geklärt werden kann, eventuell auch algebraisch, sofern einfache Termumformungen im früheren Unterricht bearbeitet wurden.	Bestimmung einer Geraden, die nicht durch den Ursprung verläuft Zusammenhang zwischen Term und Sachproblem
Die abschließende Analyse der Zuordnungsvorschrift, gerade auch im Hinblick auf den damit bestimmten Tarif der Vorwahlnummer schließt diesen ersten Teil ab. Die Darstellung der Werte der Einstiegsaufgabe legt unter Umständen die Bestimmung der Ausgleichskurve zu allen Werten nahe, diese Betrachtung ist aber an dieser Stelle nicht beabsichtigt.	
Die beiden Vertiefungsaufgaben greifen das im Unterricht bisher Erarbeitete wieder auf und vertiefen die Erkenntnisse durch eine veränderte Sichtweise. Bei der ersten Aufgaben der Vertiefung sollen die Schülerinnen und Schüler je nach Leistungsstand entweder zuerst einzelne Paare ausrechnen und über den anschließenden Plot entsprechend des bisherigen Weges den Funktionsterm experimentell bestimmen, sie könnten aber auch den proportionalen Zusammenhang direkt erkennen und den Term angeben. In beiden Fällen sollte aber der entdeckte Tarif	

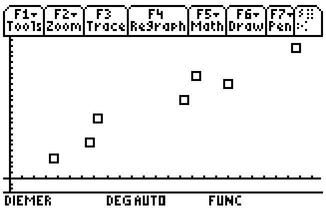
sowohl bezüglich des Terms, der Tabelle und natürlich auch bezüglich der jeweiligen Geraden mit den Tarifen der Einstiegsaufgabe verglichen werden, um die Schülerin/den Schüler gerade an dieser Stelle vielfältige Vergleichsmöglichkeiten zu geben und den Zusammenhang dieser drei Darstellungsformen genauer zu veranschaulichen. Der Tarif der zweiten Vertiefungsaufgabe dient einer ersten Abgrenzung der linearen Funktionen gegenüber anderer Funktionen und deren Graphen. Mit einfachen Termumformungen lässt sich dieser Term in die Form y = $0{,}003x^2$ bringen und die Veranschaulichung mittels des TR zeigt schnell den Unterschied zu den Eigenschaften von linearen Funktionen. An dieser Stelle sollte im Unterricht durchaus Zeit für eine genau Untersuchung dieses Tarifes genommen werden, denn gerade in der Abgrenzung gegen eine quadratische Funktion lassen sich die bedeutsamen Merkmale der linearen Funktionen noch einmal klar herausstellen. Zudem ist es wichtig, zu verdeutlichen, dass sich Telefontarife, aber auch viele andere Tarife hauptsächlich mit linearen Funktionen sinnvoll beschreiben lassen.	

Lösungsansatz

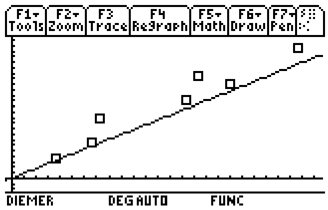
Einstiegsaufgabe:



günstige Fenstereinstellung

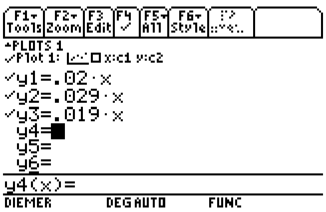


Darstellung der Punkte

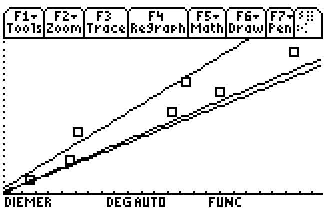


Versuch y = 0.02 · x

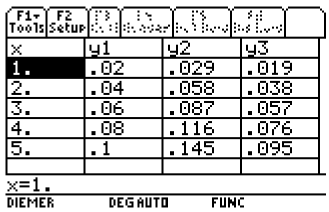
Vertiefungsaufgabe 1:



Terme der Tarife

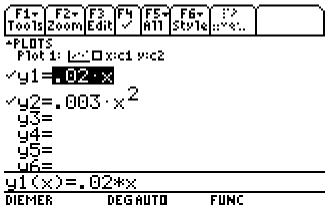


Graphen aller Tarife

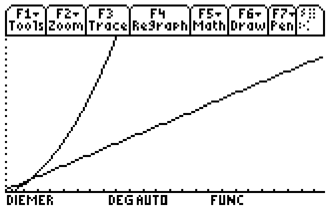


Vergleich in der Tabelle

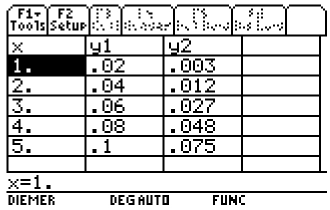
Vertiefungsaufgabe 2:



Terme der Tarife



Graphen aller Tarife



Vergleich in der Tabelle

2. Unterrichtsphase

Aufgabe

-1	0,5	1,5	5	3
-5	-0,5	2,5	13	9

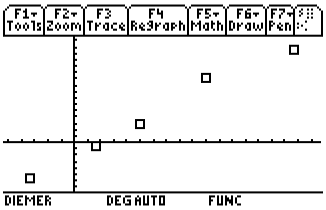
Eine Schülerin/ein Schüler findet in einem alten Heft eine Tabelle mit verschiedenen Werten. Unter der Tabelle steht das Wort Gerade mit einem Fragezeichen.

a) Überprüfe mit dem Taschenrechner, ob alle Werte der Tabelle wirklich zu Punkten gehören, die auf einer Geraden liegen. Erläutere die Vorgehensweise und dein Ergebnis.
b) Bestimme die Zuordnungsvorschrift der Geraden durch die Punkte.
c) Bestimme auf möglichst vielen verschiedenen Wegen zwei weitere Punkte, die auf der Geraden liegen.

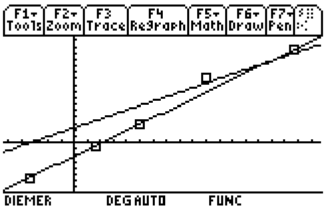
In dieser zweiten Phase sollen die Erkenntnisse der Einstiegsaufgabe wiederholt, gesichert und in einzelnen Aspekten, insbesondere bezüglich der Verschiebung parallel zur y-Achse, weitergeführt werden. Auch hier werden wieder Werte in einer Tabelle vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler überprüfen in Einzelarbeit auf bekannte Weise, ob die Punkte auf einer Geraden liegen und ermitteln mögliche Zuordnungsvorschriften. Anschließend sollen die verschiedenen Vorschriften gesammelt werden und, sofern sich dies nicht schon in der ersten Phase ergeben hat, nun weiterführend im Unterrichtsgespräch auf die einheitliche Form $y = m \cdot x + b$ gebracht werden. Einfache Termumformungen, die an dieser Stelle benötigt werden, sind zum Teil aus Klasse 7 bekannt, könnten aber auch an dieser Stelle eingeführt werden. Da die Abweichung des einen Punktes nicht klar zu erkennen ist, bieten sich nun vielfältige Möglichkeiten des weiteren Vorgehens an. Es könnte der Term einer Geraden gesucht werden, die einer möglichst guten	Geraden-gleichungen Geradenscharen $y = m \cdot x + b$

Ausgleichsgeraden entspricht, oder aber zu jeweils zwei Punkten könnte die Verbindungsgerade gesucht werden. Als weitere Möglichkeit bietet sich an, möglichst viele Punkte mit einer Geraden zu verbinden. Diese Möglichkeiten lassen sich gut in Gruppenarbeit bearbeiten und anschließend auswerten. Danach könnte der Aufgabenteil c) in Einzelarbeit bearbeitet werden. Durch die Aufforderung, möglichst vielfältig Lösungen zu finden, eröffnet sich ein breites Spektrum zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Term, Tabelle und Graph. Von Schülerinnen und Schülern gefundene Punkte können im Unterrichtsgespräch mithilfe des Overheaddisplays in den verschiedenen Darstellungsformen der Zuordnung überprüft und Lösungswege bewertet werden. Neben der klassischen Form der Einsetzung in die Funktionsgleichung werden sich sicher weitere Möglichkeiten einer Punktprobe finden.	Punktprobe

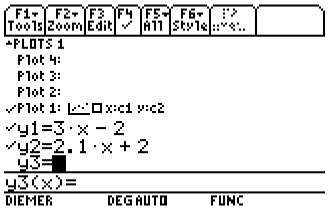
Lösungsansatz



Darstellung der Daten



Geraden während der Probierphase



Funktionsterme in der Probierphase

3. Unterrichtsphase

Weiterführende Aufgaben

Aufgabe 1: (Wertepaare mit vorgegebenen Eigenschaften)

a) Erzeuge eine Tabelle mit vier Wertepaaren, so dass eine gewählte Gerade
   - steil ansteigt
   - flach ansteigt
   - abfällt
   - parallel zu einer der vorherigen Geraden verläuft.

b) Untersuche, welche der Beschreibungen abhängig von der gewählten Skalierung ist.

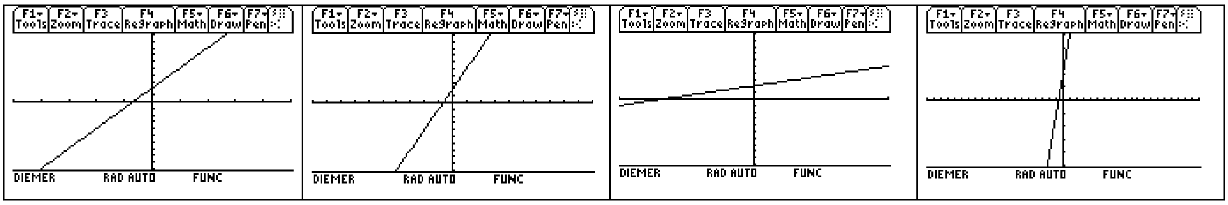
c) Ergänze deine Tabellen aus Teil a), so dass
   - die zugehörige Gerade parallel zur Geraden y = $\frac{2}{3}$x - 1 verläuft und
   - steiler ist als die Gerade y = $\frac{1}{2}$ x + 1 sowie durch den Punkt B(0|3) verläuft.

Aufgabe 2: (Skalierungsprobleme)

In einer achten Klasse hat die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler gebeten, mit dem TR schnell den Graphen der Funktion f mit f(x) = 3x + 2 zu zeichnen und zu beschreiben, ob die Gerade steil oder flach ansteigt.

Sehr schnell entwickelte sich ein großes Chaos, denn einige behaupteten, die Gerade steige steil an, andere behaupteten das Gegenteil. Um dem Problem näher zu kommen, ließ die Lehrkraft die einzelnen Graphiken an die Wand projizieren.

Alle Schülerinnen und Schüler versicherten, den richtigen Funktionsterm eingetippt zu haben.



bei allen vier Abbildungen ist die gleiche Gerade dargestellt

Aufgabe 3: (Erzeugung von Rechtecken)

a) Füge zu den beiden Punkten A(3|-7) und B(5|-6) zwei weitere C und D hinzu, so dass als Figur ein Rechteck entsteht, wenn die Geraden durch die Punkte A und B, B und D, C und D sowie A und C laufen. Erzeuge die Figur mit dem Rechner und übertrage sie in dein Heft. Achte auf eine verzerrungsfreie Darstellung der Figuren auf dem Display/im Heft.

b) Gib für alle vier Geraden die zugehörigen Terme an.

Aufgabe 4: (Flächeninhalt eines Dreiecks)

a) Stelle die vier linearen Funktionen $y_1 = x$, $y_2 = -x + 4$, $y_3 = \frac{1}{2}x + 8$ und $y_4 = -x$ verzerrungsfrei mit dem TR dar und übertrage sie ins Heft.

b) Bestimme die zwei Geraden, die mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

c) Gib den Flächeninhalt für dieses Dreieck an.

Im Anschluss an einen Merksatz zu $y = m \cdot x + b$ soll der Einstieg in eine Aufgabensequenz erfolgen, die wichtige Standardelemente hinsichtlich des Umgangs mit linearen Funktionsgraphen abarbeitet. Bei Aufgabe 1 ist ein wesentlicher Punkt die Abhängigkeit des visuellen Eindrucks von der gewählten Skalierung. Als Invariante erweist sich der Begriff der Steigung, der den sicherlich zunächst von den	Steigung, Steilheit

Schülerinnen und Schülern bevorzugten Begriff der „Steilheit“ präzisiert. Zugleich liefert der Steigungsfaktor eine Möglichkeit, die Eigenschaft „Parallelität von Geraden“ zu beschreiben. Die Schülerinnen und Schüler erzeugen Tabellen mit vorgegebenen Eigenschaften für den zugehörigen Graphen. Die Frage einer sachgerechten Skalierung bei Darstellung mit dem TR (ZSquare) drängt sich zwar u. U. von allein auf, wird aber auch ausdrücklich in einer Aufgabenstellung thematisiert. Je nach Lerngruppe könnte aber auf diese ausdrückliche Thematisierung verzichtet werden. Die damit verbundenen Erkenntnisse sind aber im Unterricht im Zeitalter der schnellen Veränderung von Skalierungen mit dem Zoom-Befehl des Taschenrechners unverzichtbar. Eigene Unterrichtserfahrungen mit graphikfähigen Taschenrechnern zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler mit der Beschreibung von Graphen bei unterschiedlichen Skalierungen oftmals große Schwierigkeiten haben. Aufgabenteil b) und c) von Aufgabe 1 thematisieren in abgewandelter Form erneut den Begriff der Steigung und vermischen die bekannten Inhalte mit neuen, weiterführenden Aspekten. Allerdings sollte die Frage der Parallelität von Geraden nur angerissen werden, vertieft soll sie im folgenden Themenkomplex behandelt werden. Aufgabe 2 behandelt vertiefend die Problematik der Skalierung, allerdings ausgehend von der graphischen Darstellung. Hierdurch werden visuell orientierte Schülerinnen und Schüler verstärkt angesprochen und können einen Zugang zu dieser wichtigen Fragestellung finden. Die Orthogonalitätsbedingung von Geraden kann im Hinblick auf die Erzeugung von Rechtecken erarbeitet werden. Ebenso lässt sich hier die Frage nach Schnittpunkten verschiedener Geraden anschließen, etwa im Sinne der Umkehraufgabe. Die Hausaufgabe zur Dreiecksfläche hat wiederholenden und vernetzenden Charakter. An dieser Stelle gibt es die Möglichkeit, in die rechnerische Bestimmung von Nullstellen einzusteigen. Im Anschluss an diese Aufgaben kann im Unterricht die Orthogonalitätsbedingung herausgearbeitet und formalisiert werden. An dieser Stelle gibt es auch die Möglichkeit, in die rechnerische Bestimmung von Nullstellen einzusteigen.	Steigungsfaktor Einfluss der Skalierung Lagebeziehung Modellierung Orthogonalität

3.2.2 Die Busfahrt - eine Bewegungsaufgabe als Zugang zu den linearen Zusammenhängen

<table>
<tr><td colspan="2">In den ersten drei Stunden der Unterrichtseinheit zum Baustein „Lineare Zusammenhänge“ sollen sich die Schülerinnen und Schüler aus einem Sachproblem heraus die wesentlichen Eigenschaften von linearen Funktionen über die drei Darstellungsformen Graph, Tabelle und Term erarbeiten. Aufbauend auf den Kenntnissen aus dem Baustein „Zuordnungen, Proportionalität …“ (3.2.7) soll der Einfluss von m und b aus dem allgemeinen Funktionsterm mx+b auf den Graphen bzw. die Tabelle untersucht werden.
Methodisch von besonderer Bedeutung ist bei diesem Zugang die arbeitsteilige Gruppenarbeit, in der die einzelnen Gruppen anhand von Arbeitskarten eine Bewegung graphisch darstellen und mit einer anderen vorgegebenen Bewegung in Beziehung setzen. Erst die Auswertung aller Gruppenergebnisse auf einer gemeinsamen Folie (bzw. „overlay-Verfahren“) löst das eigentliche Bewegungsproblem.
Die Schülerinnen und Schüler entdecken bei der Auswertung und weiteren Vertiefung die Auswirkung der Parallelverschiebung eines Graphen auf die zugehörige Tabelle sowie den Funktionsterm.

Die Systematisierung der herausgearbeiteten Eigenschaften zu den Parametern m und b erfolgt anschließend anhand eines Arbeitsblattes, das den Namen „Forschungsarbeit“ trägt.</td></tr>
<tr><td>Unterrichtsorganisation:
• Einstiegsaufgabe in arbeitsteiliger Gruppenarbeit
• Forschungsarbeit zur Festigung von Eigenschaften der Funktionenklasse</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
• ca. 3 - 4 Unterrichtsstunden</td></tr>
<tr><td>besondere Materialien/Technologie:
• Arbeitsblätter
• grafikfähiger Taschenrechner</td><td>notwendige Vorkenntnisse:
• proportionale Zuordnungen, Darstellung einer Zuordnung mit Tabelle, Graph und Term,
• grafische Darstellung von Listen mit dem GTR, Verwendung des y-Editors</td></tr>
</table>

1. Stunde

Ziel

aus einem Sachproblem heraus eine Bewegung interpretieren und als Graph darstellen

LV	Präsentation der Aufgabe (Teil I - Die Situation) ggf. kurze Diskussion über bevorzugte Plätze im Bus	s. Mat. 1 [S. 76] (OHP)
LV	Präsentation der Aufgabe (Teil II - Der Schulweg des Lehrers) [zurückgelegte Strecke s [km] = 0,5 km/Min * x Min]	s. Mat. 2 [S. 77] (OHP+AB)
UG	Wiederholung der Informationsentnahme aus Graphen und der proportionalen Zuordnung, etwa: • Wie lang ist der Schulweg? [ablesen, wo die Linie endet] • Wie lange benötigt er? • Wie schnell fährt er durchschnittlich? • Wie sieht dann der zugehörige Zuordnungsterm aus?	s. o.
GA	Arbeitsteiliges Darstellen und Auswerten von 4 Schüler-Schulwegen Implizite Aufgabe: Wer ist der erste am Bus? Wann kommen sie an? Stelle dafür die Anfahrt deines Cliquenanführers geeignet dar, z. B. im beigefügten Koordinatensystem.	s. Mat. 3 [S. 78] (AB) s. Kommentar
SV	Präsentation der Ergebnisse	OHP
UG	Erarbeitung der Problemlösung • Wo ist in deiner Darstellung die Schule, wo sind die Wohnorte zu finden? • Wer ist am schnellsten? => m • Wer ist insgesamt als Erster in der Schule? • Platzverteilung im Bus	
EA	Sicherung: Abzeichnen der Graphen und ggf. Tabellen	
HA	Gespräche im Bus	s. Mat. 4 [S. 80] (AB)

(LV = Lehrervortrag, UG = Unterrichtsgespräch, GA = Gruppenarbeit, SV = Schüler(innen)vortrag, EA = Einzelarbeit, HA = Hausaufgabe, OHP = Overheadprojektor, AB = Arbeitsblatt)

Didaktisch-methodischer Kommentar

Gemeinsamer Vergleich: Jede Gruppe stellt die Ergebnisse für ihre Schülerin/ihren Schüler dar. Durch die Dopplung der einzelnen Personen (bei 8 Gruppen) erfolgt eine gegenseitige Kontrolle. Unterschiedliche Veranschaulichungen können im Graphen standardisiert werden (Können wir dein Ergebnis nicht auch im Diagramm unterkriegen?). Die Möglichkeiten einer Tabelle werden sachbezogen wiederholt.

[Overlay Farbe => Jede Gruppe eine Folie (+ Lehrerfolie) oder eine zentrale Folie]

2. Stunde

Ziel

Sicherung aller Darstellungsformen von linearen Zusammenhängen, insbesondere der Terme

UG	Besprechung der HA (Verschiebungen, Deutung von m unter Berücksichtigung des Lehrergraphen) Vertiefung: Harald fährt genauso schnell Rad wie Hannes und kommt zusammen mit Svetlana an. [=> $y = \frac{1}{4}x + 6$]	OHP 2 [Graph]
UG	Präsentation einer Wertetabelle zu Haralds Bewegung aus Haralds Sicht (Ursprungsgerade) Erarbeitung: • Wie gewinnt man aus der Tabelle Haralds Geschwindigkeit v? • Wie kommen wir auf eine solche Tabelle? Wie erstellt man sie? => Ablesen aus Graph, aus der Aufgabe oder über einen Term (GTR) (=> Term zu Haralds Bewegung) Erkennen der Diskrepanz zwischen Wertetabelle (Haralds Sicht) und dem Verlauf des eingezeichneten Graphen (Lehrersicht)	s. Mat. 5 [S. 81] [Tabelle]
EA/PA	Erstellen einer zum Graphen von Harald passenden Wertetabelle	
UG	Vergleich => Erkenntnis: zu jedem Tabellenwert muss nur ein Verschiebungswert, hier 6 (= b), addiert werden Aufstellen des passenden Terms zu Haralds Bewegung aus der Sicht des Lehrers	[Term]
GA/HA	Erarbeitung der Terme: „Findet den Term zu eurem Schüler!“ (vgl. Std. 1) oder: zu allen Personen (HA)	

(PA = Partnerarbeit)

Didaktisch-methodischer Kommentar

In dieser Stunde liegt das Hauptaugenmerk zunächst auf der Abhängigkeit von Graph, Tabelle bzw. Funktionsterm bei der Beschreibung einer Bewegung aus der Sichtweise des Betrachters. Es muss mit den Schülerinnen und Schülern herausgearbeitet werden, dass es zum Beispiel von großer Bedeutung für die Lage einer Geraden im Koordinatensystem ist, nach welchen Kriterien der Ursprung des Koordinatensystems festgelegt wird. Möchte man also mehrere Bewegungen miteinander vergleichen, so ist ein gemeinsames Bezugsystem unumgänglich. Auf diese Weise lässt sich in nahezu natürlicher Weise die Bedeutung des Parameters b (y-Achsenabschnitt) erarbeiten.
Für die im Anschluss an diese Arbeitsphase folgende Sicherung der Darstellung der unterschiedlichen Bewegungen mithilfe verschiedenartiger Typen von Funktionsgleichungen sollte der Term der Lehrkraft mit den Termen der Schülerinnen und Schüler verglichen werden.

Funktionsgleichungen:

$Y= \frac{1}{2}x$	Lehrer	$Y = x - 6$	Svetlana (Auto)
$Y= \frac{1}{4}x + 4$	Paula (Fahrrad)	$Y = \frac{3}{4}x - 5\frac{1}{3}$	Ömer (Bus)
$Y = \frac{1}{8}x + 7{,}75$	Hannes (Skateboard)		

3. Stunde

Ziel
Sicherung zum Einfluss der Parameter m und b - die Funktionenklasse der linearen Funktionen

UG	Vergleich der Terme aus den HA	
UG	Erarbeitung: Was haben alle Terme gemeinsam? Wie sind sie gebaut (unabhängig von den konkreten Werten)? => y = m x + b Frage nach dem Einfluss der (Schar-)Parameter m und b führt auf:	Tafel
EA/PA	„Forschungsarbeit“: Experimentieren mit m und b in 3 Blöcken: • äquivalente Terme führen zu identischen Graphen • negatives m führt zu fallenden Geraden („negative Steigung“) • unterschiedliche Steigungsmaße (Scharparameter m) • unterschiedliche Verschiebungen (Scharparameter b)	s. Mat. 6 [S. 82] (AB/OHP)
SV/UG	Sicherung: Forschungsdokumentation, etwa in Tagebuchform, Versuchsbeschreibungen etc.	

Didaktisch-methodischer Kommentar

Die Blöcke können auch als arbeitsteilige Gruppenarbeit gestaltet werden. Hinsichtlich einer besseren Verankerung der Sachverhalte ist hier allerdings eine Einzel- bzw. Partnerarbeitsphase, die alle Blöcke umfasst, ratsamer.

4. Stunde [Wahl]

Ziel

grafisches und tabellarisches Lösen von Schnittpunktproblemen

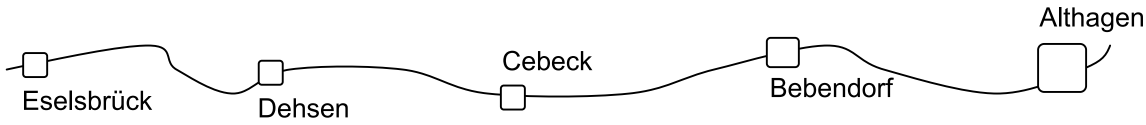
Für ein Minimalkonzept ließen sich hier auch Schnittpunktprobleme thematisieren, wenn in Klasse 7 bereits das Lösen einfacher (linearer) Gleichungen erlernt wurde. Nur dann scheint der Schritt vom graphischen und tabellarischen Lösen zum symbolischen Lösen der Schnittpunktprobleme an dieser Stelle leistbar.

Die Frage nach Zeitpunkten bzw. Orten von Überholmanövern (vgl. Stunde 1) könnte hier die Betrachtung von Schnittproblemen motivieren. Damit könnte zugleich der Umgang mit Sachaufgaben (Finden und Verwenden von Termen) gefestigt werden.

Material 1

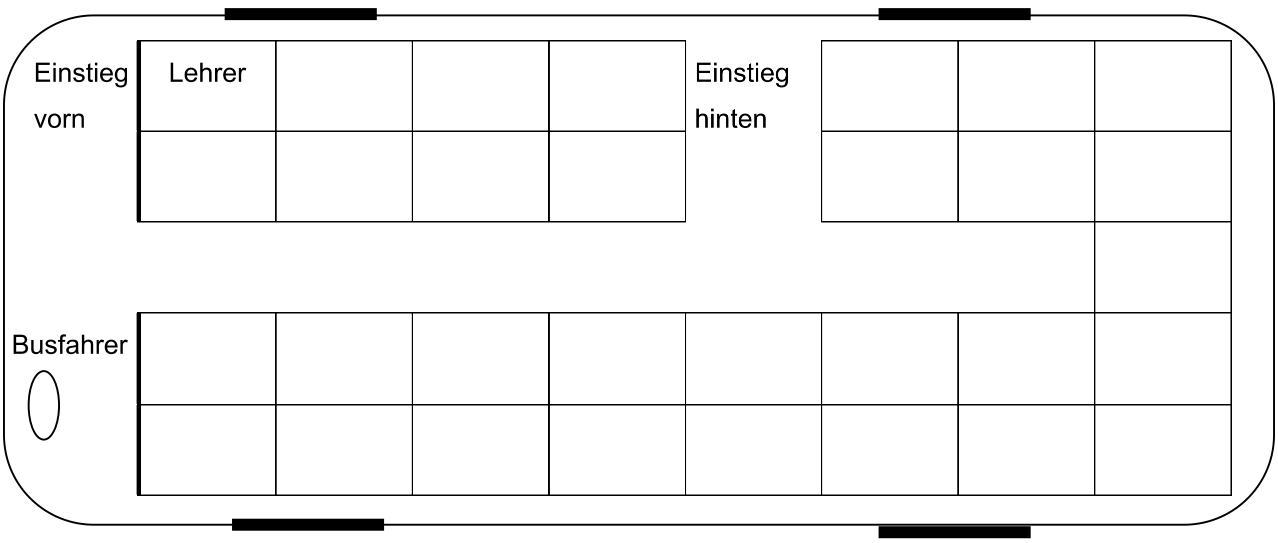
Die Busfahrt

In der 8lf gibt es vier Dorfgangs, die Eselsbrücker, Dehsener, Cebecker und Bebendorfer, die von Svetlana, Ömer, Hannes und Paula angeführt werden.



Am Wandertag ist ein Busausflug geplant, und die Klasse streitet sich schon im Vorfeld um die Vergabe der begehrten Sitzplätze.

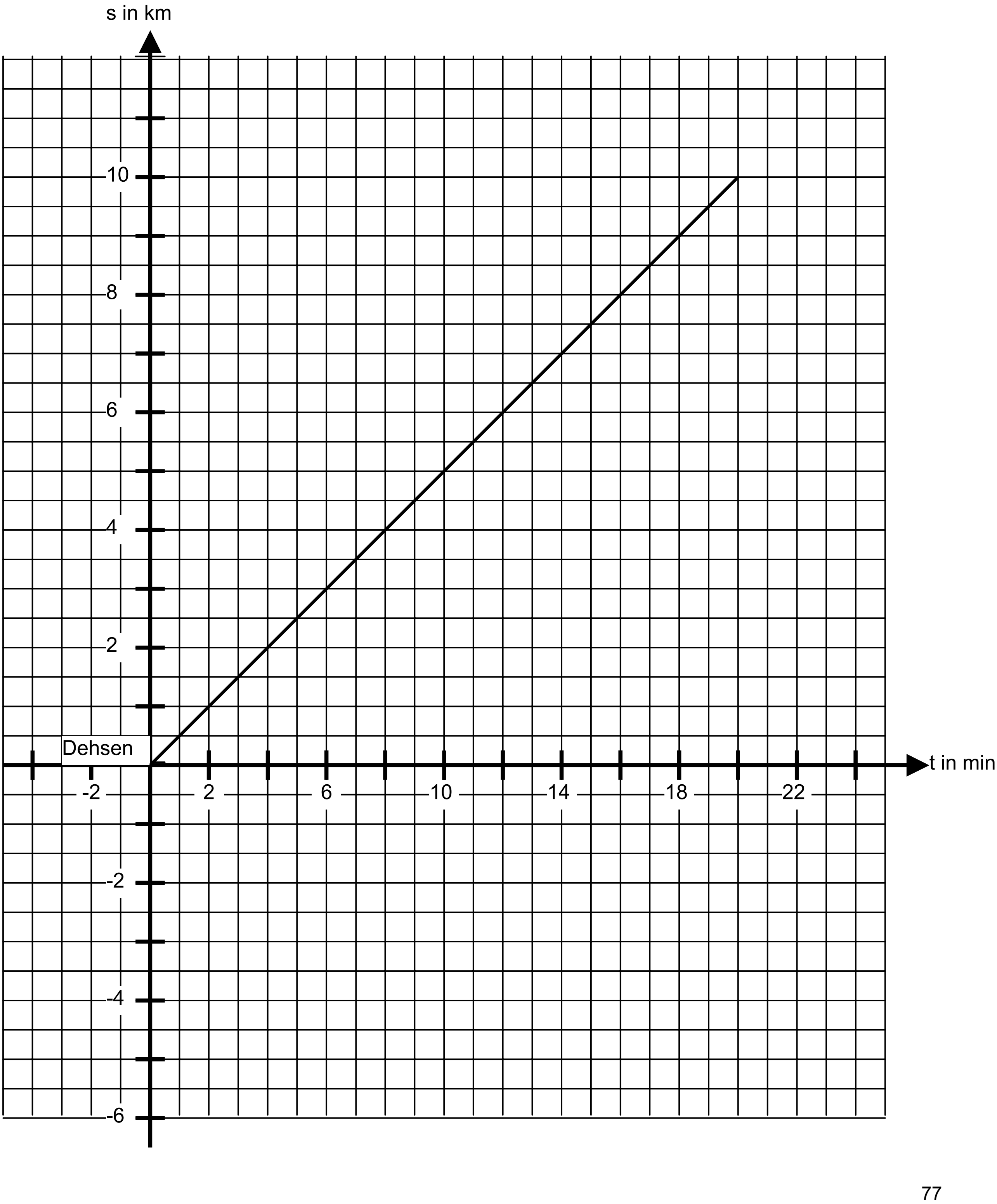
Letztlich werden die Plätze nach der Reihenfolge des Eintreffens der Cliquenanführer vergeben. Diese halten für die anderen frei.



Material 2

Die Busfahrt

Der Lehrer Lämpel wohnt in Dehsen und fährt mit seinem Motorroller zur Schule. Die nachfolgende Graphik zeigt seinen Schulweg.



Material 3

Die Busfahrt

Aufgabenkarten

„Wer zuletzt kommt, ... muss neben dem Lehrer sitzen?“

<u>Gruppe 1:</u> In Cebeck startet Hannes zur gleichen Zeit wie der Lehrer mit seinem Fahrrad. Sein Schulweg ist 6 km lang. Nach 4 Minuten passiert er den 1 km entfernten Kiosk.

<u>Gruppe 2:</u> In Cebeck startet Hannes zur gleichen Zeit wie der Lehrer mit seinem Fahrrad. Sein Schulweg ist 6 km lang.

Fahrtdauer in Min.		1		2		3	6					-4
Fahrtstrecke in km	0		0,5		1		1,5					

<u>Gruppe 3:</u> In Bebendorf startet Paula zur gleichen Zeit wie der Lehrer mit ihrem neuen Skateboard. Ihr Schulweg ist 2,25 km lang. Sie fährt im Schnitt 7,5 km pro Stunde(km/h).
Bedenke: Eine Stunde hat 60 Minuten.

<u>Gruppe 4:</u> In Bebendorf startet Paula zur gleichen Zeit wie der Lehrer mit ihrem neuen Skateboard. Ihr Schulweg ist 2,25 km lang.

Fahrtdauer in Min.		1		2		3	6					-2
Fahrtstrecke in km	0		0,5		1		0,75					

<u>Gruppe 5:</u> Ömer wohnt in der Nachbarschaft des Lehrers und fährt mit dem Schulbus 7 Minuten nach dem Lehrer los. Der Bus fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km/h.
Bedenke: Eine Stunde hat 60 Minuten.

Gruppe 6: Svetlana wohnt in Eselsbrück und hat den Bus verpasst. Sie wird mit dem Auto von den Eltern gebracht. Ängstlich schaut sie, immer wenn sie durch den nächsten Ort kommen, auf die Uhr:

Fahrtdauer in Min.	-2				6								
Fahrtstrecke in km			0		6		10		15,75				
Ortschaft			Eselsbrück		Dehnsen		Cebeck		Bebendorf				Althagen

Gruppe 7: Svetlana wohnt in Eselsbrück und hat den Bus verpasst. Sie wird mit dem Auto von den Eltern gebracht. Dabei kommen sie am Haus des Lehrers vorbei, 6 Minuten nach dem dieser von Zuhause weggefahren ist. Nach weiteren 4 Minuten kommen sie durch das 4 km hinter Dehsen liegende Cebeck.

Material 4

Die Busfahrt ... Gespräche im Bus

1) Ein Dehsener ist enttäuscht, da er nicht auf den gewünschten Plätzen sitzen kann; missmutig mault er Ömer an: „Hättest du nicht früher losfahren können?“
Um wie viele Minuten muss Ömer mindestens früher losfahren, um vor Svetlana am Bus anzukommen?
Wie verläuft diese Bewegung im Koordinatensystem?

2) Ein Bebendorfer zu Paula: „Wieso bist du eigentlich später als Svetlana am Bus gewesen? Du wohnst doch viel näher dran?“
Antworte dem Bebendorfer und erläutere deine Antwort mithilfe der Graphen.

Die Busfahrt ... Gespräche im Bus

1) Ein Dehsener ist enttäuscht, da er nicht auf den gewünschten Plätzen sitzen kann; missmutig mault er Ömer an: „Hättest du nicht früher losfahren können?“
Um wie viele Minuten muss Ömer mindestens früher losfahren, um vor Svetlana am Bus anzukommen?
Wie verläuft diese Bewegung im Koordinatensystem?

2) Ein Bebendorfer zu Paula: „Wieso bist du eigentlich später als Svetlana am Bus gewesen? Du wohnst doch viel näher dran?“
Antworte dem Bebendorfer und erläutere deine Antwort mithilfe der Graphen.

Die Busfahrt ... Gespräche im Bus

1) Ein Dehsener ist enttäuscht, da er nicht auf den gewünschten Plätzen sitzen kann; missmutig mault er Ömer an: „Hättest du nicht früher losfahren können?“
Um wie viele Minuten muss Ömer mindestens früher losfahren, um vor Svetlana am Bus anzukommen?
Wie verläuft diese Bewegung im Koordinatensystem?

2) Ein Bebendorfer zu Paula: „Wieso bist du eigentlich später als Svetlana am Bus gewesen? Du wohnst doch viel näher dran?“
Antworte dem Bebendorfer und erläutere deine Antwort mithilfe der Graphen.

Material 5

Wertetabelle zu Haralds Bewegung aus Haralds Sicht

Fahrtdauer in Min.	0	2	6	9	14	16
Fahrtstrecke in km	0	0,5	1,5	2,25	3,5	4

Wertetabelle zu Haralds Bewegung aus Haralds Sicht

Fahrtdauer in Min.	0	2	6	9	14	16
Fahrtstrecke in km	0	0,5	1,5	2,25	3,5	4

Wertetabelle zu Haralds Bewegung aus Haralds Sicht

Fahrtdauer in Min.	0	2	6	9	14	16
Fahrtstrecke in km	0	0,5	1,5	2,25	3,5	4

Wertetabelle zu Haralds Bewegung aus Haralds Sicht

Fahrtdauer in Min.	0	2	6	9	14	16
Fahrtstrecke in km	0	0,5	1,5	2,25	3,5	4

Material 6

Forschungsaufträge für die Stillarbeit und die Hausarbeit

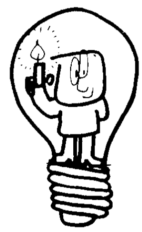
Zeichne mit dem GTR bei jedem Aufgaben-Block zu jedem Term den Graphen und übertrage jedes Mal das Bild möglichst genau ins Heft.

Beschrifte die Koordinatenachsen und schreibe den Term an den Graphen. Bemühe dich um eine gute Gliederung und um eine saubere Ausfertigung

(Anweisung: Term im ‚*Y-Editor*' eingeben und über ‚*Graph*' den Graphen anzeigen lassen!)

Was fällt dir auf? Versuche, deine Beobachtung im Heft schriftlich zu formulieren. Woran könnte das liegen? Halte auch deine Erkenntnisse schriftlich fest.

Lass Platz für mögliche Ergänzungen.



Block I

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x + 3 – 2$

c) $y = 2(x + 2) – 3$ d) $y = \frac{5}{2}x – 2 – \frac{1}{2}x + 12 – 9$

Block II

a) $y = (-1)\, x + 1$ b) $y = - x + 3$

c) $y = - 1\, x + 1{,}5$ d) $y = - x - 2$

Block III

a) $y = x + 1$ b) $y = 2x + 1$

c) $y = 3x + 1$ d) $y = - 3x + 1$

3.2.3 Die Änderungsrate als systematischer Zugang zur Steigung einer linearen Funktion

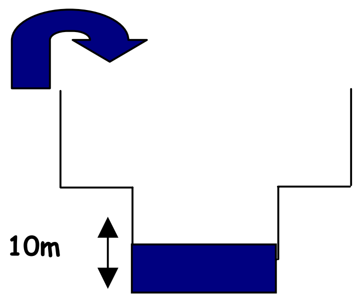
<u>Besondere Materialien/Technologie:</u> GTR
<u>Dauer der Unterrichtseinheit:</u> 2 - 3 Stunden

Im folgenden werden 2-3 Unterrichtsstunden beschrieben, in denen die Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage fiktiver, in Tabellenform gegebener Daten aus der Änderungsrate auf die Steigung der zugehörigen linearen Funktion schließen.

<u>Darstellung der einzelnen Stunden</u>
In den Stundenbeschreibungen sind Lehrziele, Arbeitsaufträge für die Schülerinnen und Schüler, Arbeitsformen und erwartete Schülerleistungen enthalten.

<u>Der Wasserspeicher in Hildesheim, problemorientierter Einstieg zur Änderungsrate</u>

Ein Wasserspeicher der Stadt Hildesheim (siehe Bild) wird im Laufe der Nacht mit einer konstanten Wassermenge befüllt. Der zuständige Aufpasser liest in bestimmten Zeitabständen die Höhe des Wasserspiegels ab. Den ersten Pegelstand bestimmt er um 20.00 Uhr. Zu seinen Aufgaben gehört es, unbedingt die Pegelstände um 23.00 Uhr und 4.00 Uhr zu notieren. Das hat er leider „verschlafen“.



Zeit t in h	0	0,25	0,5	1,25	1,5	2	3,25	4,5	6	8,25	8,5	9
Pegelstand p in m	4	4,375	4,750	5,875	6,250	7	8,875	10,25	11	12,125	12,25	12,5

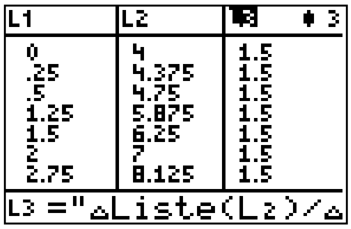
Im Unterrichtsgespräch werden mit den Schülerinnen und Schülern mögliche Fragestellungen diskutiert. Die Frage, ob dem Aufpasser zu helfen ist, steht im Zentrum. Hierbei sind die folgenden Lösungsvorschläge zu erwarten:

a) grafische Lösung: Punkte im Koordinatensystem eintragen, linear verbinden, Werte ablesen und in die Tabelle übertragen

b) rechnerische Lösung: einen oder mehrere Differenzenquotienten berechnen (Änderungsrate), um hiermit die fehlenden Pegelstände zu bestimmen [iteratives Vorgehen].

Im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch wird zunächst erarbeitet, wie man einen Wert für 23.00 Uhr bestimmen kann. Die grafische Lösung können die Schülerinnen und Schüler erstellen, oder sie kann von der Lehrkraft mittels einer vorbereiteten Folie präsentiert werden.

Dann sollte der rechnerische Weg in den Mittelpunkt rücken. Dazu muss diskutiert werden, ob sich alle Wertepaare gleichermaßen zur Lösung eignen. Zur Unterstützung können hier die Möglichkeiten des Listenmenus des GTR genutzt werden. Die Berechnung der Änderungsraten übernimmt hierbei der Rechner.



L1	L2	L3 3
0	4	1.5
.25	4.375	1.5
.5	4.75	1.5
1.25	5.875	1.5
1.5	6.25	1.5
2	7	1.5
2.75	8.125	1.5

L3 ="ΔListe(L2)/Δ

Mithilfe der dann erkannten konstanten Änderungsrate kann der gesuchte Wert als 8,5 m ermittelt werden.

Abschließendes Ergebnis der Stunde:

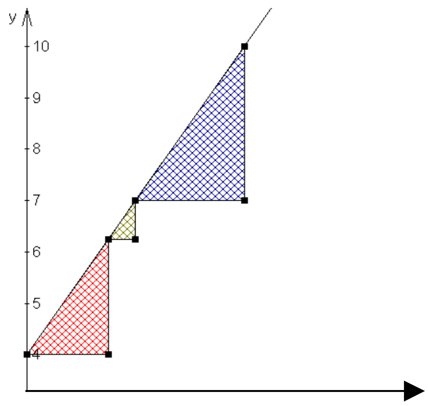
Ist die Änderungsrate konstant, so ist der zugehörige Graph ein Geradenstück.

Mögliche Hausaufgaben

1. Wertetabellen vorgeben - Änderungsraten berechnen; entscheiden, ob sich eine Gerade ergibt.
2. Gerade vorgeben - Änderungsrate bestimmen.

Differenzenquotient als Maß der Änderungsrate

Ausgehend von den Ergebnissen der vorhergehenden Stunde wird der Bezug zwischen dem zuvor berechneten Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dem Steigungsdreieck und der Steigung der Geraden hergestellt.



Durchführung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern die anschauliche Bedeutung der Größen Δx und Δy für die erstellte graphische Lösung. Hierbei entstehen für die Gerade mehrere unterschiedlich dimensionierte Steigungsdreiecke.

Den Schülerinnen und Schülern wird anschaulich deutlich, dass unterschiedliche Steigungsdreiecke bei einer Geraden immer zu derselben Änderungsrate führen.

Auf der anderen Seite stehen unterschiedliche Änderungsraten für verschiedene Seitenverhältnisse der Steigungsdreiecke und damit für verschiedene „Steilheiten“ der Geraden (diese Erkenntnis kann durch den Bezug zur Hausaufgabe unterstützt werden). Hieraus ergibt sich die übliche Begriffsbildung für die Steigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und damit die Gleichung y = mx + b einer linearen Funktion für den ersten Teil des Füllvorganges.

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen den noch fehlenden Pegelstand für 4.00 Uhr mit den erlernten Methoden in Kleingruppen. Sie sollen dabei alle Darstellungsformen und Methoden einsetzen und für ihre Ergebnisfindung eine Präsentation vorbereiten.

Erwartete Ergebnisse der Gruppenarbeit

- grafisch mit den gegebenen Punkten, Ermittlung durch Ablesen
- ermitteln der Änderungsrate für den zweiten Abschnitt
- bestimmen der Funktionsgleichung der Geraden und Berechnung des gesuchten Pegelstandes

(Der hierzu erforderliche Achsenabschnitt b kann rechnerisch mithilfe der rückwärtigen Iteration oder grafisch aus der Zeichnung ermittelt werden. Eine Bestimmung mithilfe der Punkt-Steigungsform ist hier noch nicht zu erwarten.)
Besonderes Augenmerk sollte bei der Würdigung der Präsentationen der Bestimmung des Achsenabschnitts mithilfe der rückwärtigen Iteration gelten.

Hausaufgabe
Wertetabelle mit vergleichbaren Inhalten und Bestimmung gesuchter Werte mit den erlernten Methoden

Tim hat den Rasen gesprengt, anschließend allerdings den Hahn der Wassertonne nicht wieder richtig geschlossen. Zwar füllt ein kräftiger Gewitterregen zunächst noch einmal die Tonne, doch dann sinkt der Wasserstand langsam, aber gleichmäßig.

Zeit in Minuten	8	15	30	40	
Wasserstand in m	1,02		0,75		0,60

Ergänze die fehlenden Werte. Berechne, nach wie vielen Minuten die Tonne leer ist. Ermittle rechnerisch die Höhe der Tonne. Überprüfe deine Rechnungen durch eine Zeichnung.

3.2.4 Lagebeziehungen von Geraden und Berechnung von Funktionswerten

In den folgenden drei Aufgaben ist zunächst jeweils eine Gerade zu zeichnen. Geometrische Abbildungen führen zu weiteren Geraden, deren Gleichung zu bestimmen ist. Der Graphikrechner dient zur Selbstkontrolle. Die Schülerinnen und Schüler wiederholen bei der Aufgabe die Abbildungen Verschiebung, Drehung und Spiegelung und setzen sich u. a. mit senkrecht zueinander liegenden Geraden und Geraden mit der Gleichung x=a auseinander.

Aufgabe 3 kann zur Thematisierung der Auswirkungen der geometrischen Abbildungsoperationen auf die Parameter m und b in der Gleichung y=mx+b führen.
Die Aufgaben eignen sich gut für eine Partnerarbeit.

<u>Aufgabe 1</u>
Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung y=2x-1.

a) Zeichne die Gerade. Spiegele sie an der x-Achse und bestimme die Gleichung der gespiegelten Geraden. Überprüfe dein Ergebnis, indem du g und die gespiegelte Gerade vom Graphikrechner zeichnen lässt. Verfahre ebenso bei den weiteren Aufgaben.
b) Spiegele g an der y-Achse.
c) Drehe g um 90° um den Schnittpunkt mit der y-Achse.
d) Spiegele g an der Geraden mit der Gleichung x=3.
e) Spiegele g an der Geraden mit der Gleichung y=x.
f) Spiegele g am Koordinatenursprung.
g) Verschiebe g um 2 Einheiten nach oben (unten, rechts, links).

<u>Aufgabe 2</u>

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 2$

Verfahre wie in Aufgabe 1.

<u>Aufgabe 3</u>

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{2}{5}x - 1$

Bestimme die Gleichungen der Geraden, die man erhält, wenn man die in Aufgabe 1 angegebenen Abbildungen durchführt.

Tipp: Du kannst zeichnen oder die Gleichungen durch Überlegung erhalten.

Berechnung von Funktionswerten und Stellen zu vorgegebenen Funktionswerden, auch: Nullstellen

Ist das Lösen von Gleichungen durch Rückwärtsschließen noch nicht bekannt, so könnte eine Aufgabe der folgenden Art benutzt werden, um dieses zu erarbeiten.

<u>Aufgabe 4</u>
Familie Müller wandert im Harz. Heute haben sie eine Talsperre umrundet. Morgens zeigt Tims Kilometerzähler den Kilometerstand 5 an, abends den Kilometerstand 20 sowie die Durchschnittsgeschwindigkeit 3 km/h.
Auf die Berechnung von Nullstellen führt folgende Aufgabe:

<u>Aufgabe 5</u>
Neuerdings werden dreidimensionale Figuren in Glaswürfeln erzeugt. Dabei wird an bestimmten Stellen innerhalb des Würfels das Glas geschmolzen, die äußeren Bereiche bleiben unversehrt. Dies wird durch zwei Laserstrahlen erreicht. Dort, wo sie sich schneiden, schmilzt das Glas.
Wählst du ein passendes Koordinatensystem, dann liegt ein Laserstrahl genau auf der x-Achse, der andere kann durch die Gleichung $y = -0{,}53x + 2{,}7$ beschrieben werden. An welcher Stelle schmilzt das Glas?

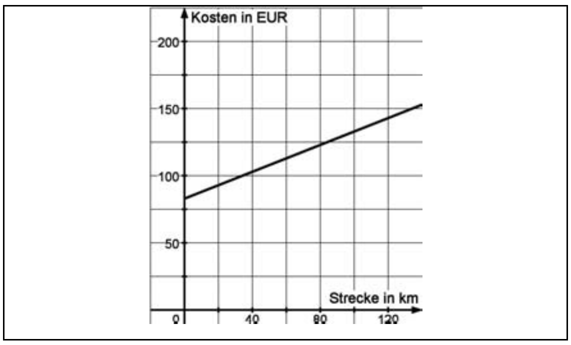
3.2.5 Schnittpunktprobleme bei linearen Funktionen

<u>Einleitende Informationen</u>
In diesem dritten Block des Bausteins „Lineare Zusammenhänge“ werden nun, ausgehend von Linearen Zusammenhängen und deren Präsentation in tabellarischer, graphischer und symbolischer Form, Schnittpunktbetrachtungen behandelt und mit verschiedenen Methoden die Schnittpunkte bestimmt.

Klara Guzmu möchte für ihren Umzug einen Lastwagen mieten und hat drei Angebote eingeholt.

Eins dieser Angebote ist rechts graphisch dargestellt - interpretiere.

Zur Termfindung: Wie kann dieses Bild auf dem GTR erzeugt werden?



Ideen

- Graph einmal vorgeben in Verbindung mit Sachsituation
- Graph interpretieren, Begriffe Grundgebühr, Preis pro km sollen von Schülern kommen
- Vorbereitung des umgekehrten Weges Text→Term
- die drei Tarife können jetzt bekannt gegeben werden:

  A: 83 EUR Grundgebühr, 0,50 EUR pro gefahrenen Kilometer

  B: 49 EUR Grundgebühr, 0,99 EUR pro gefahrenen Kilometer

  C: 199 EUR pauschal pro Tag, aber keine Kilometergebühr.

Berate Frau Guzmu, welches Angebot für sie am günstigsten ist.

Hinweis

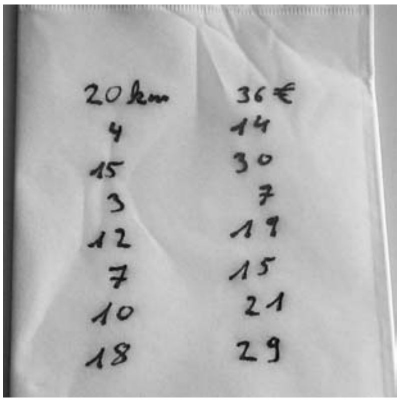
Keine Richtwerte der zu erwartenden Fahrtstrecke angeben, da sonst die Aufgabe zu schnell erledigt ist.

Der Vergleich der Tarife kann in einer längeren, offenen Gruppenarbeitsphase erfolgen. Die verschiedenen Lösungszugänge sind im Anschluss zusammenzuführen (hier sind verschiedene Methoden der Veröffentlichung denkbar).

Eine exakte, und deshalb rechnerische Bestimmung der Schnittpunkte sollte - gegebenenfalls durch den Unterrichtenden initiiert - in jedem Fall angesprochen werden. An dieser Stelle könnte ein symbolisches Lösungsverfahren motiviert und anhand von einfachen Aufgaben geübt werden.

Ausgleichsgeraden durch Punktwolken

Fragestellung



Gestern hatte Vertreter Paulsen einen Unfall mit seinem Dienstwagen, deshalb musste er heute alle Wege mit dem Taxi fahren.

Jetzt gönnt er sich eine Kaffeepause. Er hat noch etwa 30 km in einem Stück zu fahren (und noch 50 EUR in der Brieftasche - und seine Kreditkarte vergessen).

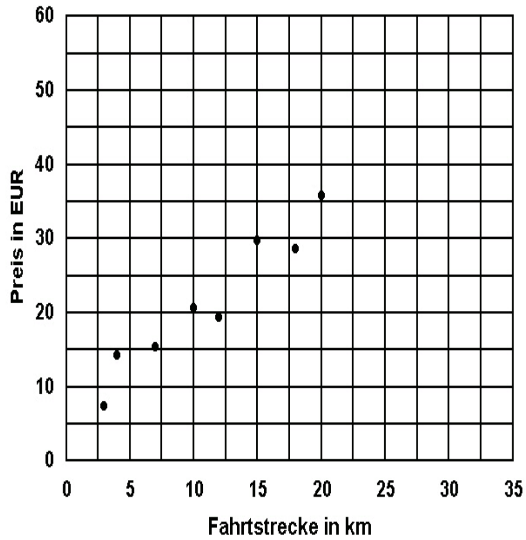
Er fragt sich, ob das Geld reichen wird. Er schreibt von allen Taxiquittungen die Beträge ab (die Fahrstrecken kennt er auswendig, weil er diese Wege jede Woche fährt).

Anmerkung zur Sache

Gerechnet wurde mit einer Grundgebühr von 2,10 EUR, einem Kilometerpreis von 1,40 EUR sowie 18 EUR pro Stunde Wartezeit (ein Beispiel aus 1999). Die Streuung ergibt sich aus den unterschiedlichen Wartezeitanteilen der verschiedenen Fahrten.

Der Versuch, aus zwei Punkten die Tarifstruktur zu ermitteln, scheitert im Ansatz am nächsten Punkt. „Der mittlere Kilometerpreis“ als besseres Modell ergibt ein klares „nein‘“; die Ausgleichsgerade (ob freihändig oder berechnet) bleibt knapp unter 50 EUR.

Für ein Arbeitsblatt zum Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden (Taxikosten)

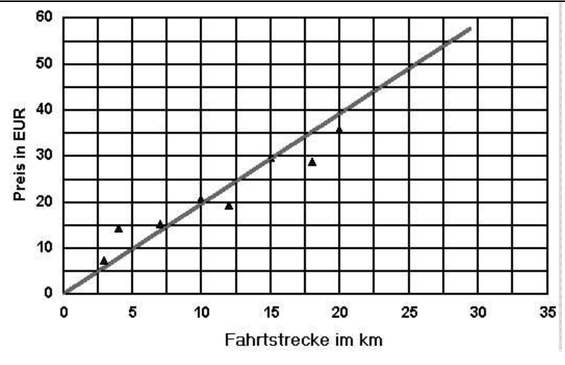
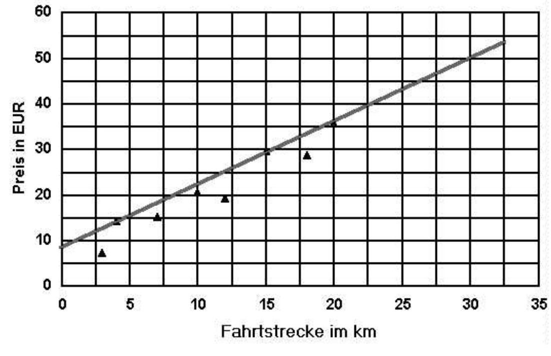


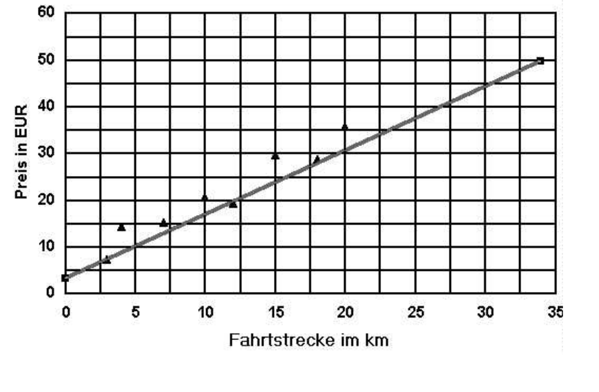
Möglicher Verlauf

Möglicherweise (in Klassen mit wenig Übung im selbstständigen Problemlösen) müssen die verschiedenen Modellierungen (unten sind einige aufgeführt, weitere sind denkbar) zunächst diskutiert und erst dann vor dem Hintergrund der Realsituation (Abhängigkeit der Taxikosten von der nicht zu ermittelnden Wartezeit) arbeitsteilig validiert werden.

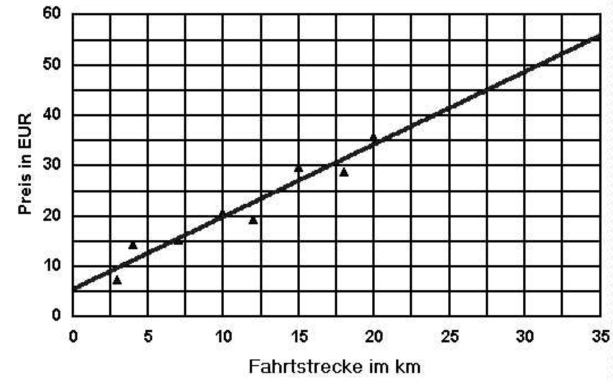
Abhängig von den in der Lerngruppe vorgeschlagenen Ideen zur Bestimmung einer Ausgleichsgeraden kann hier auch eine Diskussion über Kriterien einer „besten/hinreichend guten“ Regression geführt werden. Auf quantitative Aussagen über den Regressionsfehler kann in dieser Jahrgangsstufe verzichtet werden. Im Sinne eines Spiralcurriculums können die (intuitiv) gewonnen Erfahrungen über eine „passende“ Regression in der Jahrgangsstufe 10 wieder aufgegriffen werden.

Wahrscheinliche Schülermodellierungen:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>durchschnittlicher Kilometerpreis</td>
<td>sichere Lösung („worst case“) → immer die oberen Punkte verbinden</td>
</tr>
</table>



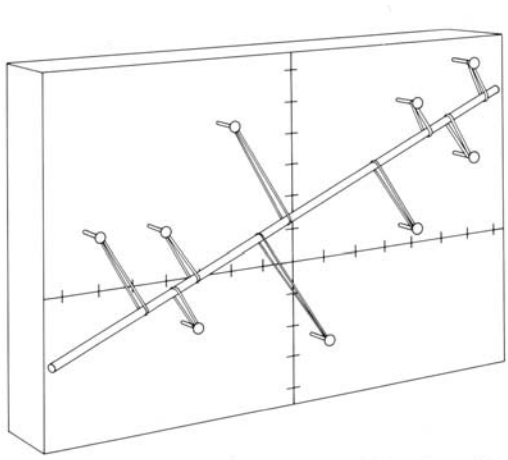
Wartezeit ausblenden, immer die unteren Punkte



freihändige Ausgleichsgerade

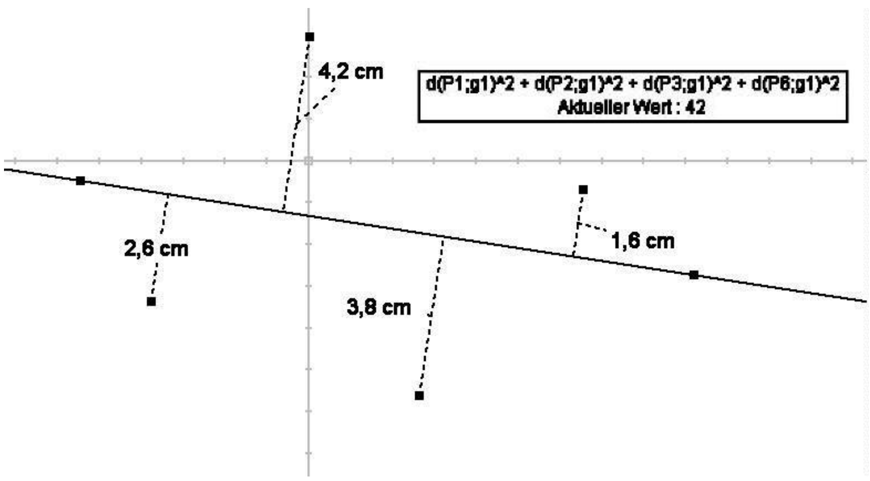
<u>Hinweise</u>

K. Dewdney hat in „Computer-Kurzweil" (Heidelberg 1988) die analoge Rechenmaschine rechts beschrieben:



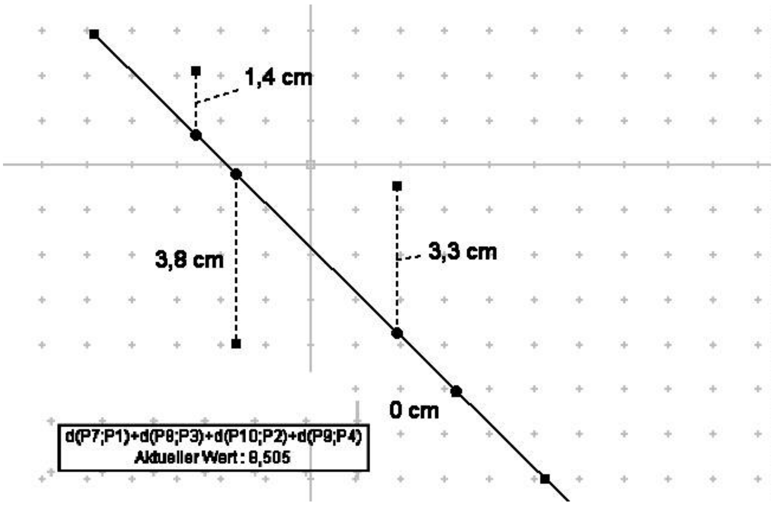
Ein Analoggerät zum Finden der Ausgleichsgeraden für eine Reihe von Datenpunkten.

„Man überträgt die Datenpunkte auf das Holzbrett und schlägt in jedem der Punkte einen Nagel ein. Als nächstes streift man eine Anzahl gleichartiger Gummiringe auf den Stab, einen für jeden Nagel. Dann hält man den Stab ungefähr in die richtige Stellung und zieht jeden Gummiring über einen der Nägel. Wenn man den Stab jetzt loslässt, schwenkt er wackelnd in eine Gleichgewichtsposition ein.

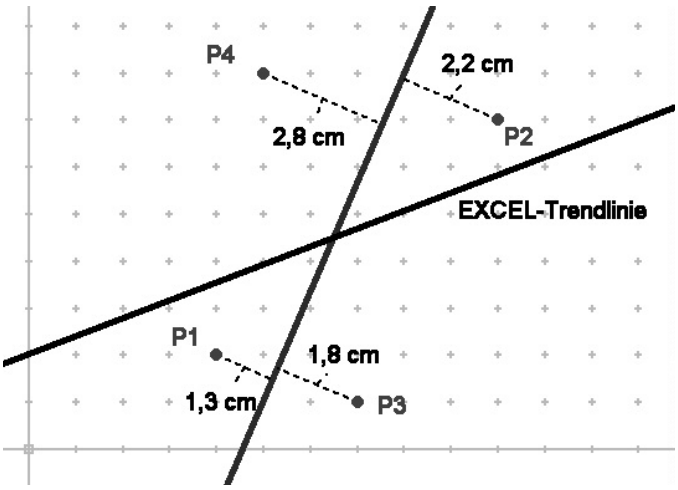


In dieser Position ist die Gesamtenergie des Systems minimal. Daher hat man die Summe der Quadrate der Abstände von den Nägeln zum Stab minimiert (sie sind zur Spannkraft proportional). Nimmt man diese Abstände als Kriterium, so liefert die Endlage des Stabes diejenige Gerade, die am besten zu den Daten passt. In den Formeln der Statistiker für die lineare Regressionsanalyse stehen zwar nicht diese Entfernungen, sondern die Quadrate der senkrecht nach unten gemessenen Abstände; dennoch berechnet Hawleys Gerät etwas zumindest genauso Schwieriges."

Das Prinzip lässt sich leicht auf ein DGS übertragen, in dem die Gerade durch Ziehen bestimmt wird (wenn viel Zeit ist, lässt sich hier auch untersuchen, welche Unterschiede zwischen Abstandssumme und Summe der Quadrate besteht).

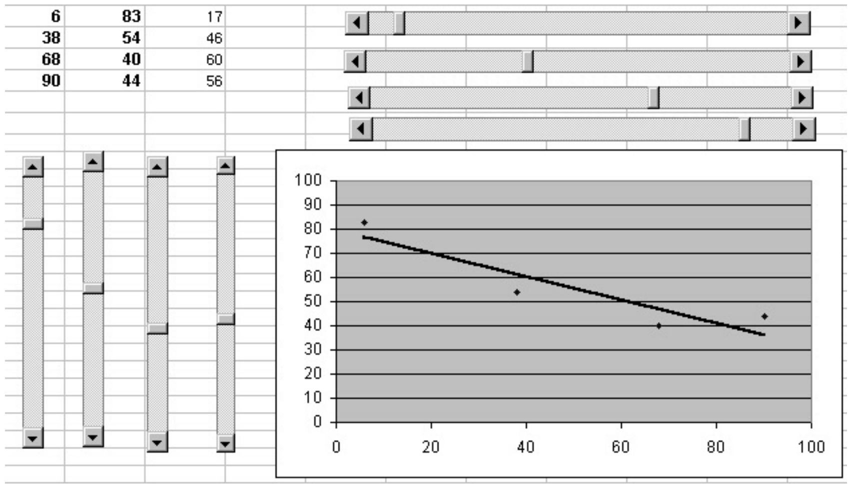


Ebenso ist die „Formel der Statistiker" leicht zu visualisieren (hier noch ohne Quadrate):



Es lassen sich dabei z. B. mit 4 Punkten Konstellationen erzeugen, in denen die Lineare Regression von der „Gummibandmethode" stark abweichende Ergebnisse liefert - was eine abschließende Modellkritik herausfördern könnte.

In einer Tabellenkalkulation kann die Auswirkung der Veränderung der Werte (das „Ziehen an den Gummibändern" mit Schiebereglern) direkt beobachtet werden.



<u>Schlussbemerkung</u>
Die hier gezeigten Möglichkeiten sind in diesem Umfang nicht zu verantworten, wenn nicht gleichzeitig weitere Ziele (Umgang mit DGS/Tabellenkalkulation/Modell-Diskussion) verfolgt werden sollen.

3.2.6 Kontakt

Clemens Diemer	*C.diemer@gmx.de*
Uwe Feyerabend	*uwe.feyerabend@t-online.de*
Volker Hillmann	*hillmann@nwn.de*
Wolfram von Kossak	*wolfram_v_kossak@yahoo.com*
Andreas Mertins	*amertins@t-online.de*
Ulrike Thoele	*thoeleal@surfen.de*
Rüdiger Thiemann	*rthiemann@t-online.de*
Siegfried Weiß	*siegfried.weiss@gmx.de*
Carsten Willms	*carsten.willms@web.de*
Andreas M. Witte	*a.m.witte@gmx.de*