2 Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und deren Terme

2.1 Rahmenrichtlinien - Baustein „3.2.6 Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und deren Terme“

Bei der Bestimmung von Längen, Flächen- und Rauminhalten von geradlinig begrenzten Figuren soll das Zusammenspiel von Geometrie und Algebra deutlich werden: Einerseits werden diese geometrischen Sachverhalte durch Terme beschrieben und andererseits Terme und ihre Äquivalenz geometrisch interpretiert. Der algebraische Nachweis der Äquivalenz soll Grundfertigkeiten im Umgang mit Termen erweitern und festigen.

Das Problem, die Flächen- bzw. Rauminhalte von Polygonen und Polyedern aus leicht zu messenden Streckenlängen zu berechnen, soll mithilfe von Zerlegungen und Ergänzungen bearbeitet werden. Dabei lassen sich zur Berechnung für dieselbe Figur oft verschiedene Zerlegungen entdecken, die auf unterschiedliche, aber äquivalente Terme führen. Umgekehrt sollen auch Terme wie $a^2 - b^2$ und $(a + b)^3$ auf unterschiedliche Weise visualisiert werden, wodurch geometrische Methoden zur Entdeckung algebraischer Zusammenhänge beitragen.

Die Äquivalenz von Termen soll außer durch Visualisierung auch durch das Einsetzen von Zahlen rechnerisch per Hand oder auch tabellarisch mit dem Rechner *geprüft* und durch Anwendung der Rechengesetze *gezeigt* werden. In diesem Zusammenhang sollen nur Terme solcher Komplexität behandelt werden, wie sie in den oben genannten geometrischen Zusammenhängen auftreten.

Inhalte und Verfahren	Hinweise
Berechnung von Umfang bzw. Gesamtkantenlänge, Flächeninhalt bzw. Oberflächeninhalt und Rauminhalt an Polygonen und Polyedern geometrische Sachverhalte durch Terme beschreiben Terme geometrisch interpretieren (binomische Formeln u. a.) Prüfung der Äquivalenz von Termen durch geometrische Interpretation und durch exemplarisches Einsetzen von Zahlen Nachweis der Äquivalenz durch Umformung der Terme mithilfe der Rechengesetze kontextfreie Termumformungen (Ausmultiplizieren und Ausklammern)	VERNETZUNG Symmetrien (3.2.4) Terme (u. a. 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.3.8) Darstellung von Körpern in Schrägbildern und Modellbau (3.2.3) Zylinder, Kegel (3.3.8) Auswirkung von Messungenauigkeiten auf Ergebnisse DIDAKTIK/METHODIK Wechsel der Darstellungsformen Einsatz von 3D-Programmen (Schnittbilder, Gittermodelle u. a.) Terme als Module ERWEITERUNG figurierte Zahlen Funktionen mehrerer Veränderlicher

(aus: Niedersächsisches Kultusministerium: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7-10, Mathematik. Hannover 2003, Seite 23)

2.2 Unterrichtseinheit „Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und deren Terme“

Die Inhalte des Bausteins 3.2.6 bauen auf dem Inhalt „Umfang und Flächeninhalt“ der Rahmenrichtlinien der Orientierungsstufe (Abschnitt 3.3, Seite 35 ff) auf, wonach u. a. der Umfang von geradlinig begrenzten Figuren bestimmt, die Formeln für Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken gekannt und angewendet, ebene Figuren auf Zerlegungsgleichheit untersucht, Oberflächen von Quadern und Würfeln bestimmt sowie Rauminhalte von Quadern und Würfeln durch Ausfüllen mit Einheitswürfeln bestimmt werden sollen.

Die Inhalte des Bausteins knüpfen aber auch an die Inhalte des Bausteins „3.2.4 Längen, Flächen- und Rauminhalte“ der curricularen Vorgaben für die Schuljahrgänge 5/6 von 2004 an (Seite 18), wonach bei der Bestimmung von Längen, Flächen- und Rauminhalten von geradlinig begrenzten Figuren mit <u>rechten</u> Winkeln das Zusammenspiel von Geometrie und Arithmetik deutlich werden soll, weil Formeln entwickelt, angewendet und interpretiert werden.

<table>
<tr><td colspan="2">Bei einer - mathematischen - Wohnung, die gerecht zwischen zwei Bewohnern aufgeteilt werden soll, stellt sich die Frage nach der Wohnraumfläche. Dies führt auf konkrete Flächenberechnungen von Polygonen anhand verschiedener Flächenzerlegungs- und Ergänzungsideen[3]. Dabei werden spezielle Polygone wie das Dreieck, Parallelogramm oder Trapez thematisiert. Die Berechnungen werden verallgemeinert, und es entstehen für den Flächeninhalt bestimmter Polygone ganz unterschiedliche Terme. Die Wertgleichheit, die zunächst nur geometrisch begründet ist und ggf. anhand einzelner Zahlenbeispiele überprüft wurde, soll auch algebraisch verifiziert werden. Dazu werden zunächst in einem Einschub die geltenden Rechengesetze bereitgestellt (z. B. mithilfe eines Gruppenpuzzles) und auch geometrisch visualisiert. Das Assoziativgesetz der Multiplikation führt zur Dimension 3 und damit auf die Volumenberechnung von Quadern. Dies wird bei der mathematischen Wohnung, bei der es u. a. teilweise unterschiedlich hohe Zimmer gibt, angewendet, wenn es um die gerechte Heizkostenabrechnung geht. Hier ist auch empfohlen, die unterschiedlichen Zimmer aus Papier herzustellen (Schnittmuster im Anhang), weil man dann besonders gut z. B. die Prismen und ihre jeweilige Grundfläche erkennt, um anschließend das Volumen zu berechnen.

In den folgenden Stunden (11. bis. 13. Stunde) sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe geometrischer Objekte Terme erstellen und umgekehrt Terme geometrisch interpretieren. Dabei lernen sie auch die binomischen Formeln kennen. Diese Stunden sind als „Stationenlernen“ ausgearbeitet.

In den weiteren Stunden wird ein Unterrichtsgang skizziert, in dem überwiegend kontextfrei Terme umgeformt werden. Dieser Gang ist besonders für die Schulen geeignet, die einen CAS-Rechner eingeführt haben. Ansonsten gibt es hierzu genügend Material in den Lehrbüchern.</td></tr>
<tr><td>besondere Materialien/Technologie:
• DGS, CAS, GTR</td><td>Dauer der Unterrichtseinheit:
• etwa 20 Unterrichtsstunden</td></tr>
</table>

[3] Alternativ könnte man z. B. auch die seitliche Fassade eines Hauses betrachten, die neu gestrichen werden soll, so dass man die Größe der zu streichenden Fläche ermitteln muss.

Gliederung

2.2.1 Überblick über den Unterrichtsverlauf

1. Stunde:	Vorstellung der mathematischen Wohnung; Flächenbestimmungen durch Abtrennen bzw. Ergänzen rechtwinkliger Dreiecke
2. Stunde:	Umfangsbestimmungen; Entwicklung einfacher Formeln
3. Stunde:	Übungsstunde zur Anwendung der Formeln - auch mithilfe von GTR/CAS
4. Stunde:	Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks
5. Stunde:	Flächeninhalt eines Parallelogramms sowie ggf. eines Trapezes
6. Stunde:	Zimmer 2 - Fläche: Erstellung unterschiedlicher Flächenterme
7. Stunde:	Rechengesetze und exemplarischer Nachweis (Termumformung)
8. Stunde:	Rechnerische Überprüfung der Wertgleichheit der Flächenterme von Zimmer 2
9. Stunde:	Anwendungsbezogene Volumenberechnungen
10. Stunde:	Weitere Volumenberechnungen in der mathematischen Wohnung
11. Stunde:	Station 1: Kantenlängen von Figuren als Terme Station 2: Flächeninhalte von Figuren als Terme
12. Stunde:	Station 3: Volumen von Körpern als Terme Station 4: Figuren, die auf Binomische Formeln führen
13. Stunde:	Station 5: Unterschiedliche Körper mit gleichem Volumen Station 6: Figur → Term → Figur
14. Stunde:	Wertgleichheit von Termen
15. Stunde:	Wertgleichheit von Termen
16. Stunde:	Multiplikation von Summen (kontextfrei)
17. Stunde:	Anwendung/Übung der Binomischen Formel (kontextfrei)
18. Stunde:	Allgemeine Übungseinheit
19. Stunde:	Klassenarbeit
20. Stunde:	Besprechung und Rückgabe

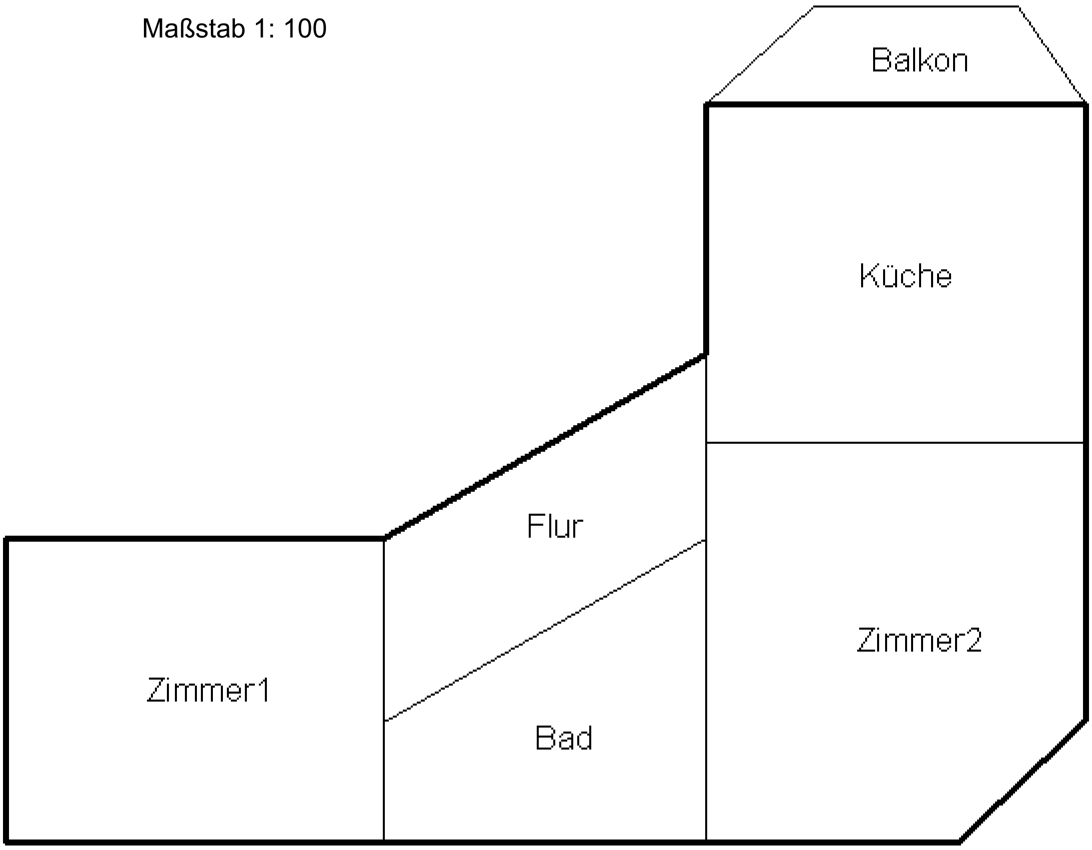
2.2.2 Unterrichtsverlauf

1. Stunde

Einstiegsaufgabe

Die Studentin Anna und der Student Bernd teilen sich die unten abgebildete Wohnung. Sie wollen die Miete von monatlich 500,- € gerecht aufteilen.

Maßstab 1: 100

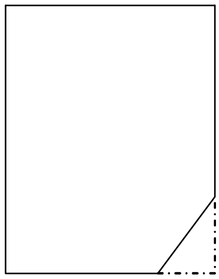


Zimmer 1 hat eine „schräge" Zimmerdecke, die von 2,50 m Höhe an der linken Außenwand der Wohnung auf die volle Höhe von 3,80 m zum Flur hin ansteigt. In der Küche ist (z. B. für einen Schornstein) ein Raum 2 m · 2,50 m · 1 m von der Decke abgehängt.

Allgemeine Lernziele

Vorwissen zur Flächenberechnung aktivieren; neue Strategie(n) für „komplexere" Flächen insbesondere für das rechtwinklige Dreieck entwickeln

Stundeninhalte



Nach einer Gruppenarbeit zur Ideensammlung bzw. selbstständigen Bearbeitung der Aufgabe werden im Unterrichtsgespräch die möglichen Ergebnisse zusammengetragen.

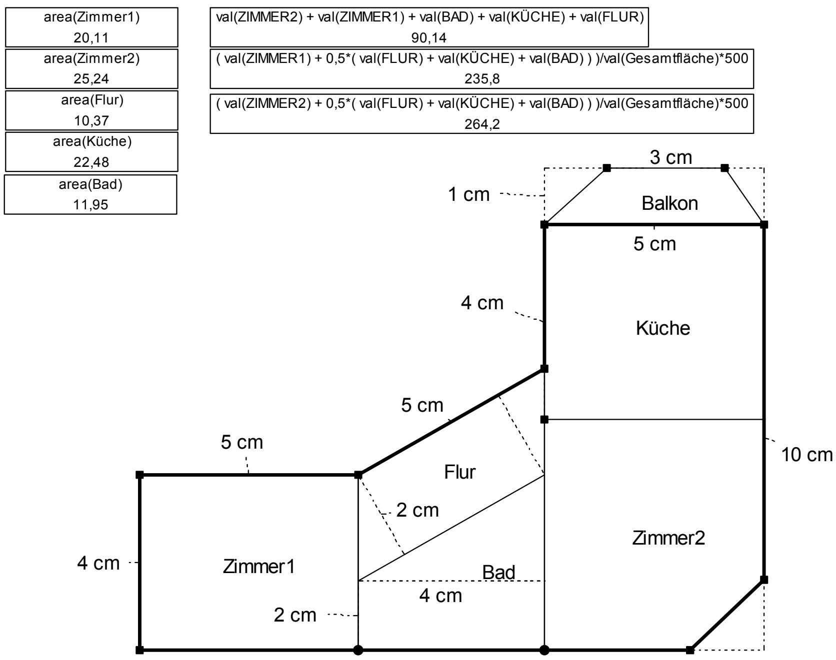
Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Notwendigkeit, die Flächeninhalte von Zimmer 1 und 2 zu bestimmen. Sollten sie bereits die Notwendigkeit erkennen, dass die Gesamtfläche zu bestimmen ist, wird dieses problematisiert und ein Arbeitsplan für die Berechnung aller Räume erstellt. Dabei werden zunächst die Zimmer 1 und 2 berechnet. Die Strategien der Berechnung von Zimmer 1 sind aus dem Vorunterricht bekannt [fr (a, b) = a · b]. Der Flächeninhalt von Zimmer 2 soll hier nur durch eine einfache Strategie bestimmt werden (Ergänzung und Zerlegung; siehe Bild).

Die Vielfalt der Zerlegungs- und Ergänzungsmöglichkeiten soll erst zu einem späteren Zeitpunkt (Stunde 6) wieder aufgegriffen werden. Die Strategie zur Berechnung von Flächeninhalten von rechtwinkligen Dreiecken soll erarbeitet und gesichert werden.

Hier schließt sich die Thematisierung des Gesamtproblems an.

Hausaufgabe Berechnung der restlichen Flächen
(Strategien zur Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken werden gefestigt und die Ausgangsfrage kann beantwortet werden).

Lösung (hier mithilfe DynaGeo erstellt und mithilfe des Befehls AREA(…) berechnet)



2. Stunde

Allgemeine Lernziele

Begriffe für Flächen benennen bzw. kennen lernen; Umfänge der Figuren Rechteck, Dreieck, Parallelogramm und Trapez am Beispiel der Wohnung berechnen

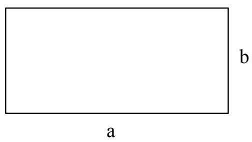
Stundeninhalte

Bei der ausführlichen Besprechung der Hausaufgabe soll die Tragfähigkeit der Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien hervorgehoben werden.

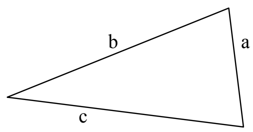
Aufgabe

Anna und Bernd möchten noch in ihrer Wohnung Fußleisten anbringen. Der laufende Meter ihrer Lieblingsfußleiste kostet im Baumarkt IBO lediglich 3,99 €.

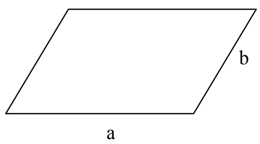
Diese Aufgabe kann in Partnerarbeit gelöst werden, damit die Schülerinnen und Schüler die Strategie zur Umfangsbestimmung zunächst am konkreten Beispiel erarbeiten. Nachdem die Aufgabe besprochen worden ist, wobei die Türbereiche zu berücksichtigen sind, sollten die Umfänge für die oben genannten Figuren an variablen Längen verallgemeinert werden.



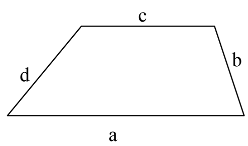
ur (a, b) = a + b + a + b = 2 a + 2 b



ud (a, b, c) = a + b +c



up (a, b) = a + b + a + b = 2 a + 2 b



ut (a, b, c, d) = a + b + c + d

Hausaufgabe weitere Aufgaben zur Umfangsberechnung

3. Stunde

Übungsstunde zur Anwendung der Umfangsformeln:

Im Anhang befindet sich ein Übungsblatt (Anlage 1), das den zentralen Inhalt der Stunde bildet. Die Aufgaben 2, 3 und 4 eignen sich auch für die Bearbeitung mit GTR und Listen bzw. CAS und Tabellen mit Define, wodurch der funktionale Aspekt geübt und gefestigt werden soll.

Als Hausaufgabe sind die Klammeraufgaben und evtl. die Aufgabe 4.b) vorgesehen.

4. Stunde

Allgemeine Lernziele

Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks entdecken; Übertragung des Grundseite-Höhe-Konzepts auf das Parallelogramm

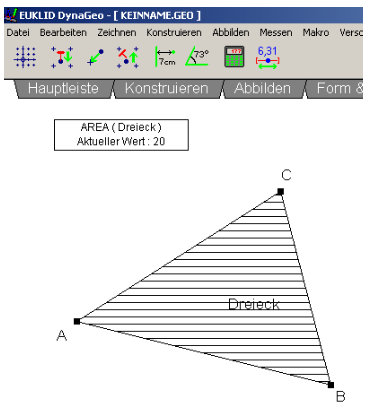
Stundeninhalte

Die folgende DGS-Aufgabe soll sowohl in Partnerarbeit im Rechnerraum als auch individuell mit einem CAS bearbeitet werden. Alternativ kann sie auch von einem oder mehreren Schülerinnen und Schülern an einem Demonstrationsgerät gemeinsam entwickelt werden.

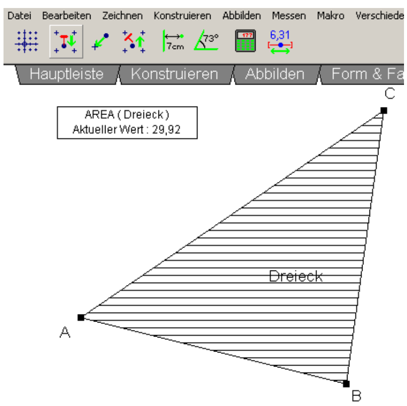
Aufgabe

Verschiebe eine Ecke des Dreiecks so, dass sich der Flächeninhalt nicht verändert.

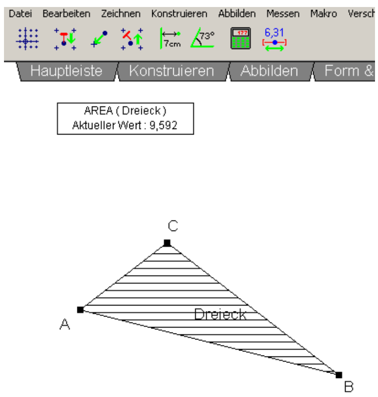
Das gezeichnete Objekt Dreieck kann zunächst sinnvoll umbenannt werden. Danach wird der Flächeninhalt automatisch durch den Befehl "area (Dreieck)" unter dem Menüpunkt *Messen – Termobjekt erstellen* eingegeben und durch Linksklick an einer freien Stelle erstellt.



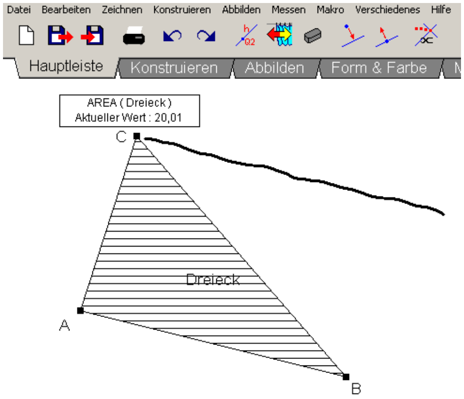
Originaldreieck



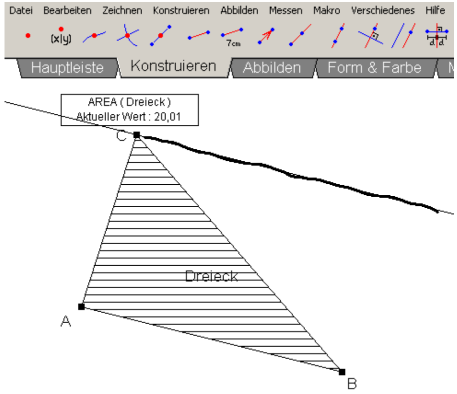
Dreieck vergrößert



Dreieck verkleinert

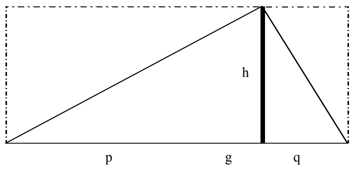


Ortslinie von C - Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt



Ortslinie von C mit paralleler Gerade unterlegt

Die Ortslinie suggeriert den Schülerinnen und Schülern, dass der Flächeninhalt von Dreiecken bei gleichbleibender Höhe konstant ist. Dies erfordert einen allgemeinen Beweis, der mithilfe der oben eingeführten Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien geführt werden sollte.



Bei der Beweisführung soll die geometrische Betrachtungsweise im Vordergrund stehen:
$F_{D1,2}$ (p; q; h) = ½ p · h + ½ q · h
mit p + q = g erhält man den Flächeninhalt des Rechtecks und aufgrund der Halbierung die Flächeninhaltsformel für das Dreieck F_D (g; h) = ½ g · h.

Hausaufgabe Entwicklung einer Formel für die Parallelogrammfläche; Überprüfung der Formel anhand der Parallelogrammfläche aus dem Einstiegsbeispiel

5. Stunde

Formel für das Parallelogramm sichern (Hausaufgabe): Entweder Zerlegung des Parallelogramms in zwei Dreiecke oder Abtrennung und Verschiebung eines rechtwinkligen Dreiecks

Übungsaufgaben

Formel für eine Trapezfläche gewinnen, z. B. mithilfe der Aufgabe „Überlegt euch möglichst viele verschiedene Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Trapezen. Erinnert euch an die bekannten Strategien. Ihr könnt ergänzen, zerlegen, verschieben ...“ (siehe Anlage 2).
Möglich wäre auch die Erarbeitung der Trapezflächenformel mithilfe des Buchs oder des Internets - ggf. als Hausaufgabe.

<u>6. Stunde:</u> „Zimmer 2-Problem“

<u>Lernziele</u>

Anwendung der Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien zur Bestimmung von Termen für den Flächeninhalt der Grundfläche von Zimmer 2

<u>Aufgabe</u>

Erinnere dich an den Grundriss unserer Wohngemeinschaft. Finde möglichst viele verschiedene Terme für den Flächeninhalt von Zimmer 2. Veranschauliche dein Vorgehen.

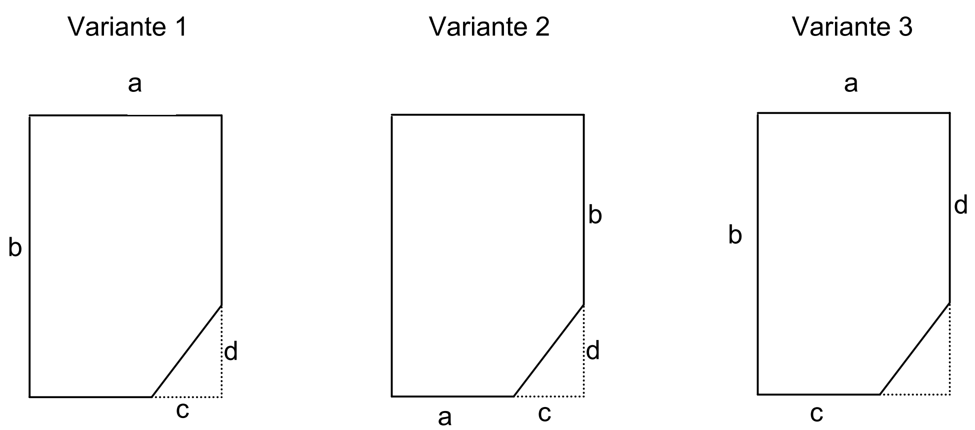
<u>Didaktisch-methodische Hinweise</u>

Die Schülerinnen und Schüler haben im Vorunterricht verschiedene Strategien der Flächenbestimmung kennen gelernt, die beim „Zimmer 2-Problem“ zur Anwendung kommen. Wir schlagen die Bearbeitung des Problems in Gruppen vor. Die Schülerinnen und Schüler haben 20 Minuten Zeit zur Bearbeitung und sollen ihre Lösungen zur späteren Präsentation auf Folien dokumentieren. Die Aufgabe kann einen Wettbewerbscharakter bekommen. Ziel ist dabei, möglichst viele ‚verschiedene’ Terme zu erhalten. Der Erfahrung nach sind Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle äußerst kreativ und werden viele verschiedene Lösungen finden. Ergänzend können im Unterrichtsgespräch weitere Lösungsfiguren von der Lehrkraft vorgegeben und durch Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Terme aufgestellt werden.

Die Äquivalenz dieser und folgender Terme wird in den nächsten Stunden nachgewiesen (s. u.).

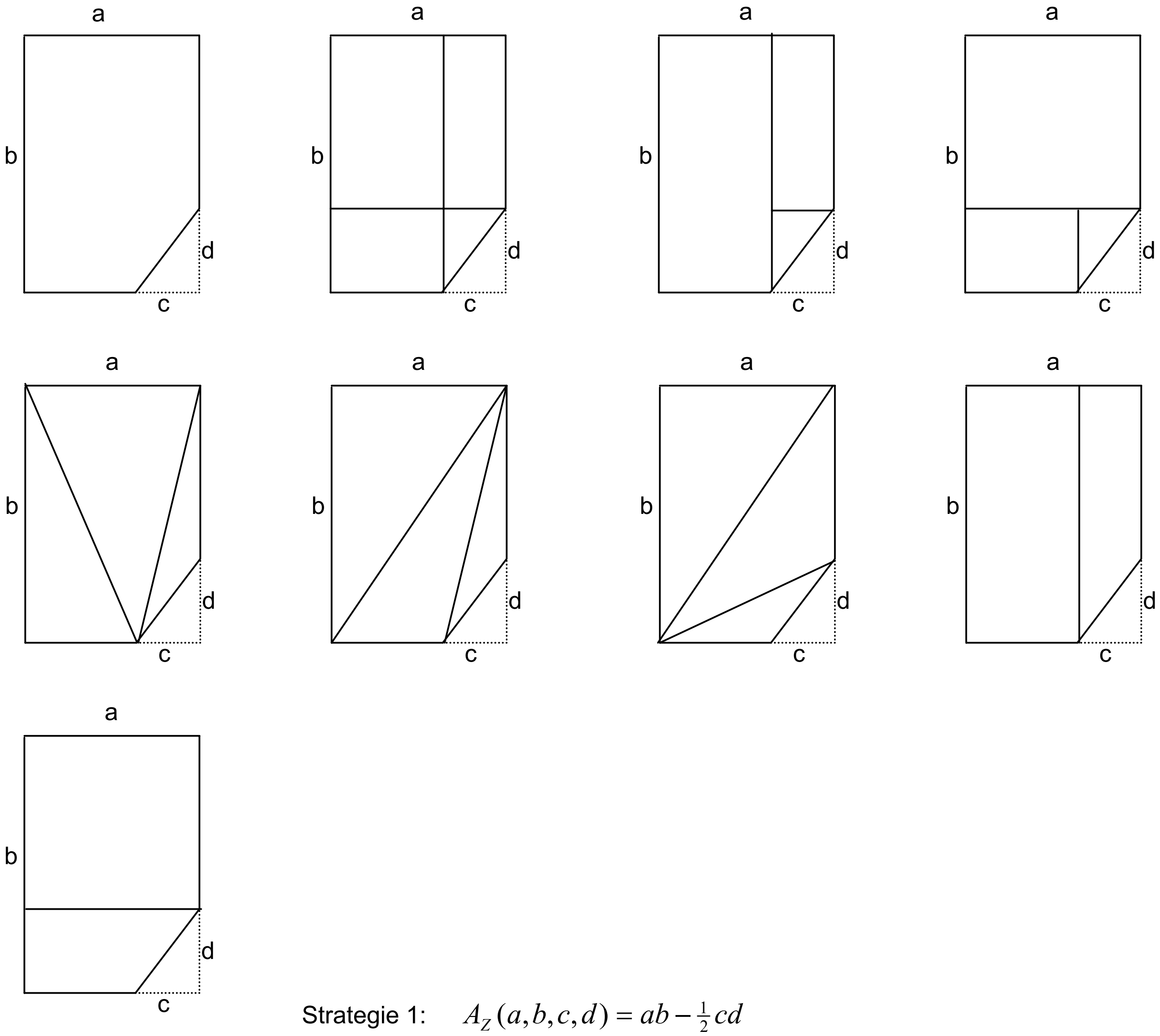
<u>Lösung</u>

Die Seitenlängen der Figur können auf drei qualitativ unterschiedliche Weisen benannt werden, aus denen sich verschiedene Termgruppen ergeben. Die Aufgabe kann also arbeitsteilig bearbeitet werden.



Nachfolgend ist eine Auswahl möglicher Lösungen aufgeführt, die deren Vielfältigkeit dokumentiert. Es bleibt dem Unterrichtenden freigestellt, je nach Zeit und Leistungsstand der Klasse die Lösungen der Schülerinnen und Schüler u. U. entsprechend zu ergänzen.

Lösung Variante 1



Strategie 1: $A_Z(a,b,c,d) = ab - \frac{1}{2}cd$

Strategie 2: $A_Z(a,b,c,d) = (a-c)(b-d) + c(b-d) + d(a-c) + \frac{1}{2}cd$

Strategie 3: $A_Z(a,b,c,d) = b(a-c) + c(b-d) + \frac{1}{2}cd$

Strategie 4: $A_Z(a,b,c,d) = (b-d)a + (a-c)d + \frac{1}{2}cd$

Strategie 5: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(a-c)b + \frac{1}{2}(b-d)c$

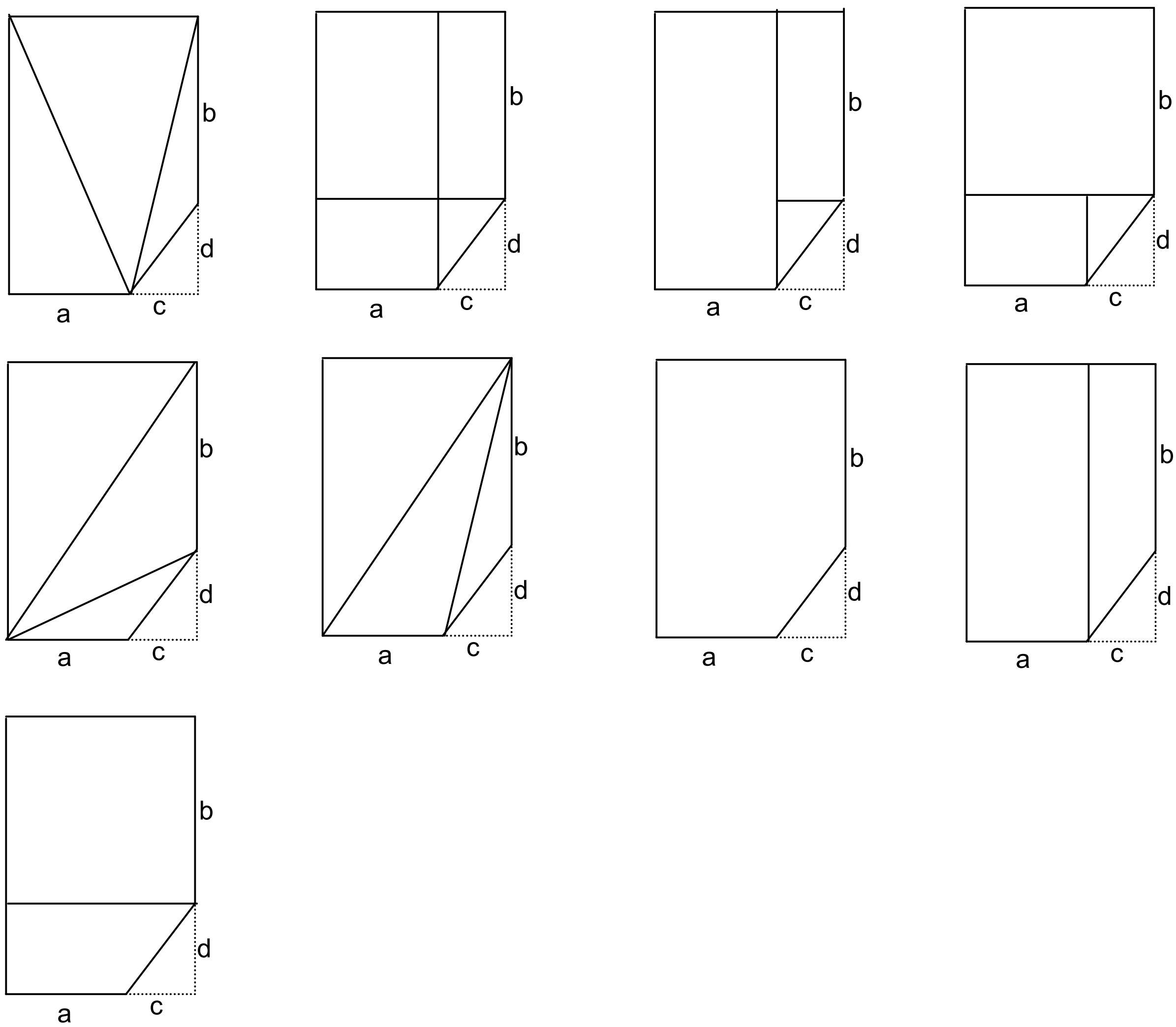
Strategie 6: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}(a-c)b + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(b-d)c$

Strategie 7: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(b-d)a + \frac{1}{2}(a-c)d$

Strategie 8: $A_Z(a,b,c,d) = b(a-c) + \dfrac{(b-d)+b}{2}c$

Strategie 9: $A_Z(a,b,c,d) = a(b-d) + \dfrac{(a-c)+a}{2}d$ ...

Lösung Variante 2



Strategie 1: $A_Z(a,b,c,d) = (a+c)(b+d) - \frac{1}{2}cd$

Strategie 2: $A_Z(a,b,c,d) = ab + ad + bc + \frac{1}{2}cd$

Strategie 3: $A_Z(a,b,c,d) = a(b+d) + bc + \frac{1}{2}cd$

Strategie 4: $A_Z(a,b,c,d) = (a+c)b + ad + \frac{1}{2}cd$

Strategie 5: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}(a+c)(b+d) + \frac{1}{2}bc$

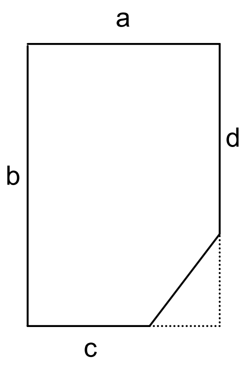
Strategie 6: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) + \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}bc$

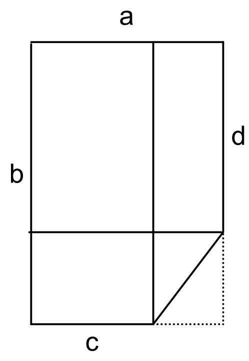
Strategie 7: $A_Z(a,b,c,d) = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) + \frac{1}{2}b(a+c) + \frac{1}{2}ad$

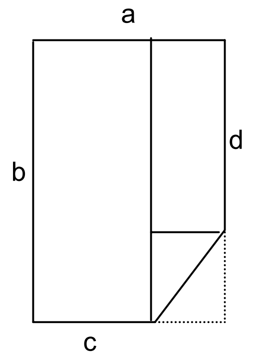
Strategie 8: $A_Z(a,b,c,d) = a(b+d) + \dfrac{(b+d)+b}{2}c$

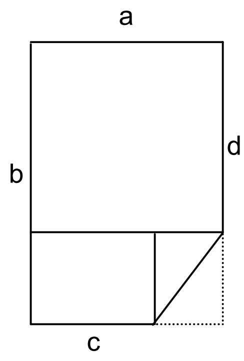
Strategie 9: $A_Z(a,b,c,d) = (a+c)b + \dfrac{(a+c)+a}{2}d$

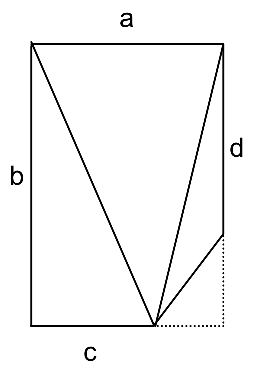
Lösung Variante 3

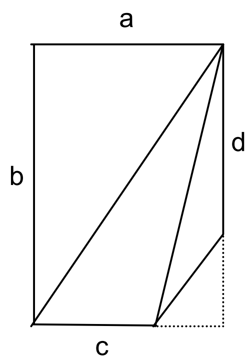


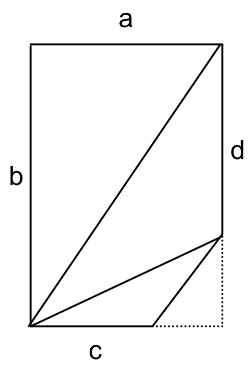


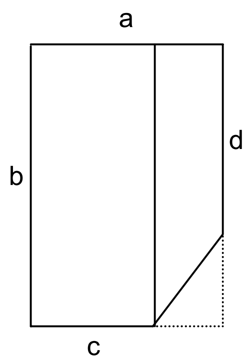












Strategie 1: $A_Z(a,b,c,d) = ab - \tfrac{1}{2}(a-c)(b-d)$

Strategie 2: $A_Z(a,b,c,d) = (a-c)d + cd + c(b-d) + \tfrac{1}{2}(a-c)(b-d)$

Strategie 3: $A_Z(a,b,c,d) = bc + d(a-c) + \tfrac{1}{2}(a-c)(b-d)$

Strategie 4: $A_Z(a,b,c,d) = ad + c(b-d) + \tfrac{1}{2}(a-c)(b-d)$

Strategie 5: $A_Z(a,b,c,d) = \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}d(a-c)$

Strategie 6: $A_Z(a,b,c,d) = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{2}d(a-c)$

Strategie 7: $A_Z(a,b,c,d) = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}da + \tfrac{1}{2}c(b-d)$

Strategie 8: $A_Z(a,b,c,d) = bc + \dfrac{b+d}{2}(a-c)$

Strategie 9: $A_Z(a,b,c,d) = ad + \dfrac{a+c}{2}(b-d)$

Damit stehen am Ende der Bearbeitung des „Zimmer 2-Problems“ drei Gruppen wertgleicher Terme zur Verfügung. Problem: Wie kann man die Äquivalenz ohne geometrische Anschauung erkennen, d. h. die Äquivalenz rechnerisch bestätigen? Auf diese Weise bekommt die Behandlung von Termumformungen und deren Regeln eine Sinnhaftigkeit.

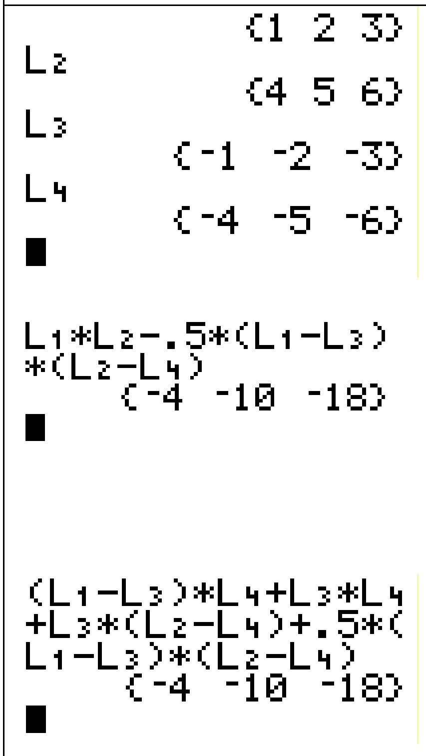
Die Wertgleichheit der Terme sollte zunächst auch durch Einsetzen von Werten exemplarisch bestätigt werden. Neben der arbeitsteiligen ‚händischen’ Überprüfung besteht die Möglichkeit, hierbei den GTR oder ein CAS oder eine Tabellenkalkulation oder ein DGS hierfür einzusetzen.

Beispiel anhand

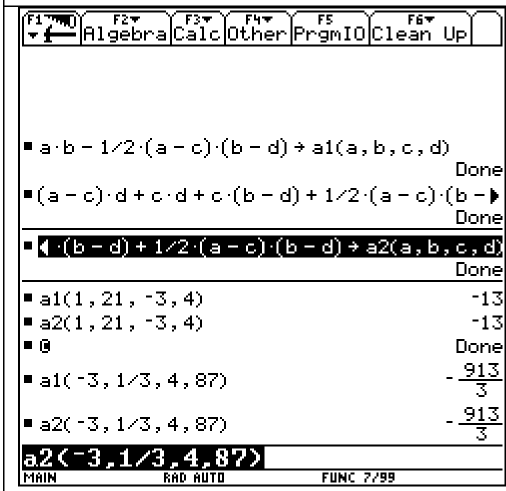
Strategie 1: $A_Z(a,b,c,d) = ab - \frac{1}{2}(a-c)(b-d)$

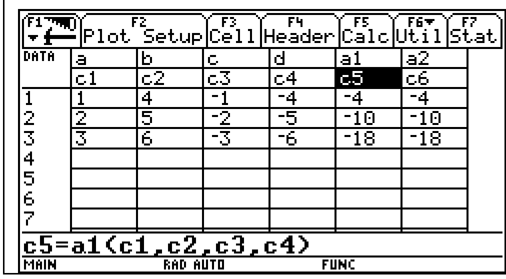
Strategie 2: $A_Z(a,b,c,d) = (a-c)d + cd + c(b-d) + \frac{1}{2}(a-c)(b-d)$

GTR



CAS (hier Voyage)





<u>7. Stunde:</u> Rechengesetze

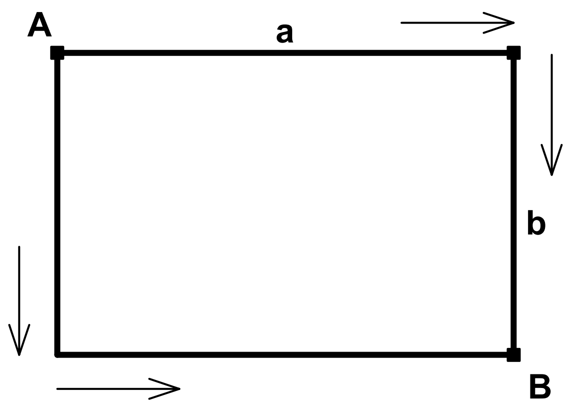
In Anknüpfung an die in der 6. Stunde entstandenen unterschiedlichen Terme bei der Berechnung von Zimmer 2 werden jetzt die Rechengesetze eingeführt.
Die Terme müssen aufgrund der Anschauung äquivalent sein. Man erhält auch bei der Berechnung der Zimmergröße durch Einsetzen konkreter Zahlen dasselbe Ergebnis. Als Problem verbleibt die algebraische Überprüfung der Äquivalenz.
Die Rechengesetze sollen auf möglichst einfache, auf geometrischer Anschauung basierende Weise hergeleitet werden. Das Ordnungsprinzip soll die Aufteilung nach Dimensionen sein, damit bei den Schülerinnen und Schülern die Vorstellung verankert wird, dass die Addition und Subtraktion von Variablen ersten Grades der Addition und Subtraktion von Längen entspricht, Terme wie $a \cdot b$ Flächen beschreiben und $a \cdot b \cdot c$ als Volumen zu interpretieren ist. Damit sollen Fehler wie $3a^2 + a = 4a^2$ vermieden werden.

Hinweis: 1. Intention: Am Ende sollten die Schülerinnen und Schüler drei der Terme (die einfacheren z. B. 1 und 3) aus dem „Zimmer 2-Problem" auf Äquivalenz überprüfen können.

Empfehlung: als Gruppenpuzzle für eine Stunde möglich.

Dimension 1 **Kommutativgesetz der Addition:** $a + b = b + a$

Zur Visualisierung dient das Kantenmodell eines Rechtecks

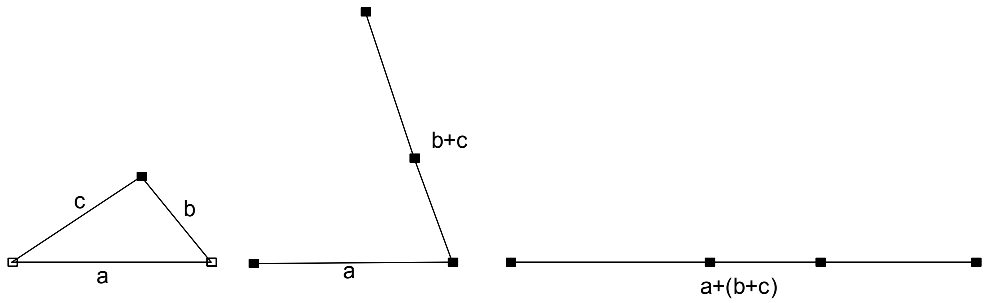


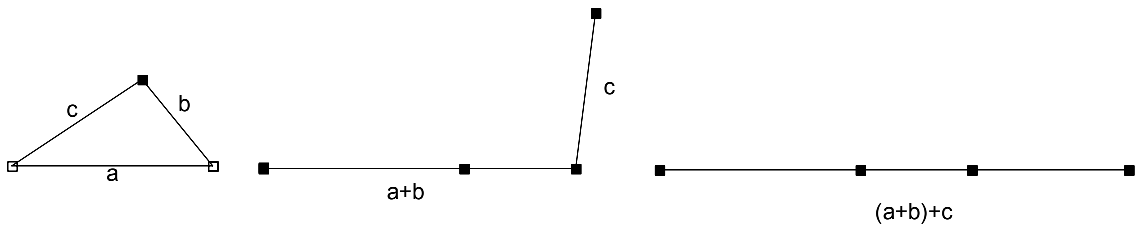
Um das Kantenmodell für die Schülerinnen und Schüler greifbar zu machen, schlagen wir vor, dieses aus Strohhalmen und Pfeifenreinigern als bewegliche Eckverbindungen herzustellen. Das bietet den Vorteil, dass man die Gleichheit der Längen $a + b$ *und* $b + a$ durch Ziehen an den Punkten A und B visualisieren kann. Die Längen liegen dann aufeinander und werden als gleich lang erkannt.

Wird kein Modell verwandt, kann die obere Zeichnung als Vorlage dienen, um über die Gleichheit der Wege von A nach B zu argumentieren.

Assoziativgesetz der Addition: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Zur Visualisierung dient das Kantenmodell eines Dreiecks

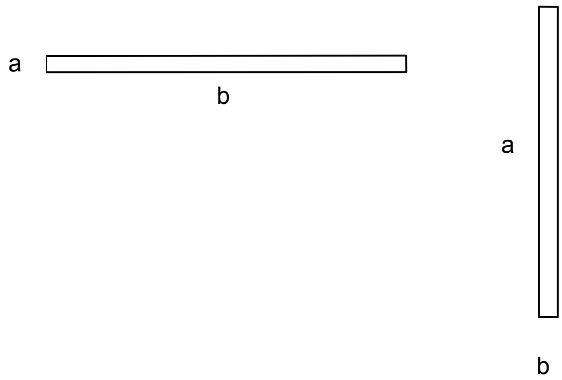




Zur Erstellung des Modells werden wieder Strohhalme unterschiedlicher Länge und Pfeifenreiniger verwandt. Durch die unterschiedliche Reihenfolge im Geradebiegen der Gelenkverbindungen wird das Assoziativgesetz der Addition visualisiert.

Dimension 2 **Kommutativgesetz der Multiplikation:** $a \cdot b = b \cdot a$

Zur Visualisierung dient ein Rechteck



Durch das unterschiedliche Legen des Rechtecks und dem Vertauschen der Bezeichnungen wird hier unmittelbar aus der Flächenformel „Flächeninhalt = Länge · Breite“ Einsicht in das Kommutativgesetz der Multiplikation erzeugt.

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

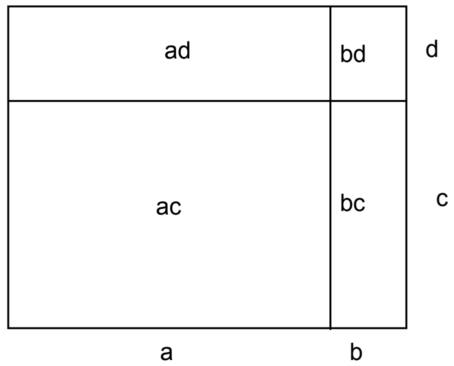
Zur Visualisierung dient ein unterteiltes Rechteck

Die Gesamtfläche dieses Rechtecks kann durch die Addition der Teilflächen oder durch die Multiplikation der Gesamtlänge mit der Breite bestimmt werden.

Multiplikation von Summen als Spezialfall des Distributivgesetzes:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Zur Visualisierung dient ein unterteiltes Rechteck



Ein solches Puzzle könnte aus Pappe zugeschnitten, gleiche Seitenlängen farbig markiert und die Teile an der Tafel mit Magneten oder Kreppband fixiert werden.
Durch das Zusammenlegen der Teilrechtecke wird unmittelbar einsichtig, dass die Summe der Teilflächen dem großen Rechteck entspricht.
Anmerkung: Diese Aufgabe könnte auch mithilfe eines geeigneten Arbeitsauftrags in die Hausaufgabe verlagert werden, weil die grundsätzliche Vorgehensweise durch den Nachweis des Distributivgesetzes bekannt ist.

Dimension 3 **Assoziativgesetz der Multiplikation:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Zur Visualisierung dient ein Quader (Modell aus der Sammlung, Baustein....).

Ein Quader wird auf zwei verschiedene Grundflächen gestellt. Die Formulierung des Sachverhaltes, dass der Rauminhalt in diesem Zusammenhang unabhängig von der Wahl der Grundfläche ist, gibt das Assoziativgesetz der Multiplikation.

8. Stunde: rechnerischer Nachweis der Äquivalenz aufgestellter Terme

Die Wertgleichheit der vielen unterschiedlichen Terme für den Flächeninhalt des Zimmers 2 aus der 6. Stunde, deren Wertgleichheit zumindest geometrisch klar ist, soll nun mithilfe der Rechengesetze verifiziert werden.

9. Stunde: anwendungsbezogene Volumenberechnungen

Vorbereitende Hausaufgabe
Bastelbögen für die Modelle der einzelnen Zimmer (Kopiervorlagen siehe Anlage 3);

für fünf Schülerinnen/Schüler pro Gruppe, je Person ein Zimmer: es empfiehlt sich, die Bastelbögen etwa eine Woche vorher an die Schülerinnen und Schüler zu verteilen.

Lernziele

Einführung der Volumenformel für gerade Prismen; Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien im Raum anwenden

Aufgabe

Anna und Bernd stöhnen über die hohe Heizkostenrechnung ihrer Altbauwohnung. Ihr Hauswirt schlägt ihnen vor, die Raumhöhe durch eine Zwischendecke zu verringern. Er behauptet, dass die monatlichen Kosten in der Heizperiode bei Verringerung des Rauminhalts der Wohnung um 40 Cent pro Kubikmeter sinken.

Die beiden Studenten könnten in Eigenarbeit die bisherige Raumhöhe von 3,80 m auf die bei Neubauten übliche Höhe von 2,50 m absenken. Die Materialkosten der Zwischendecke werden voraussichtlich 8 € pro Quadratmeter betragen. Lohnt sich diese Unternehmung, wenn der Mietvertrag noch zwei Jahre läuft?

Lösung

Gesamtfläche der Wohnung: $A_{WG} = 90{,}13m^2$

Reduziertes Volumen der auf 2,50m abgehängten Wohnung ca.: $V_{ab} = 225{,}325m^3$

Ursprüngliches Volumen: $V_{WG} = 90{,}13m^2 \cdot 3{,}80m - 0{,}5 \cdot 4m \cdot 5m \cdot (3{,}80m - 2{,}50m) - 2m \cdot 2{,}5m + 1m \approx 324{,}494m^3$

Volumenverringerung: $\Delta V = 99{,}169m^3$; monatliche Ersparnis 39,67 €

Materialkosten: $K = 90{,}13m^2 \cdot 8$ €/$m^2 = 721{,}04$ €

Die Kosten sind nach etwas mehr als 18 Monaten mit Heizungsbetrieb ausgeglichen.

Bei einer durchschnittlichen Heizperiodendauer von acht Monaten pro Jahr hängt der Sinn der Umbaumaßnahme vom Zeitpunkt des Umbaus ab (vor, nach, in der Heizperiode).

Möglicher Stundenverlauf

Klärung der Problematik und Erstellung einer Lösungsstrategie im Plenum.

Man sollte dabei mit der Berechnung des reduzierten Volumens beginnen, da es aufgrund der einfacheren Deckenform leichter zugänglich ist als das ursprüngliche.

(Die Problematik der Dauer der Heizperiode sollte mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.)

Die folgende Bearbeitung dieser Aufgabe in Partner- oder Kleingruppenarbeit ist denkbar. Vorausgesetzt ist hier die Kenntnis der Berechnung des Quadervolumens.

Dabei sind zwei prinzipielle Erkenntnisstufen denkbar:

A) Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Quadervolumina und greifen bei der Bestimmung der Volumina für die übrigen Räume auf die Zerlegungs- und/oder Ergänzungsstrategien aus der Flächenberechnung zurück.
Ziel ist die Erarbeitung der Volumenformel für gerade Prismen:
Volumen = Grundfläche * Höhe.

B) Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass das Volumen proportional zur Höhe des Raumes ist, so dass sich die Volumenformel für gerade Prismen ergibt.
Es ergibt sich die Notwendigkeit, diese Formel anhand der Strategien aus A zu belegen.

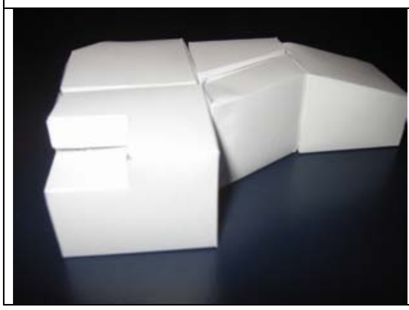
<u>Hausaufgaben</u>

1. Berechne das ursprüngliche Volumen von Zimmer 2, Flur und Bad.
2. Erstelle aus den Bastelbögen entweder das Modell der Küche oder des Zimmers 1 und bestimme das ursprüngliche Volumen. (Schülerinnen und Schüler, die schon eines der beiden Modelle erstellt haben, erstellen das jeweils andere.)

<u>10. Stunde:</u> weitere Volumenberechnungen in der mathematischen Wohnung

<u>Lernziele</u>

Bestimmung des Differenzvolumens und der möglichen Kostenersparnis; anschauliche Erweiterung des Begriffs Grundfläche

		
	Zimmermodelle	

<u>Möglicher Unterrichtsverlauf</u>

Schülervorträge zur Volumenbestimmung des reduzierten Volumens aus den Hausaufgaben, unterstützt durch die jeweiligen Modelle.

Gruppenarbeitsphase (fünf Schüler pro Gruppe, je Schüler ein Zimmer); Arbeitsauftrag:
„Berechnet unter Zuhilfenahme der Faltmodelle das ursprüngliche Volumen der Wohnung und diskutiert anschließend, ob die Umbaumaßnahme für die Studenten lohnend ist.“
Diese Phase kann mit abschließender Besprechung die verbleibende Unterrichtszeit in Anspruch nehmen.
Zur Vertiefung bietet sich die Bestimmung von Kantenlängen und Oberflächen anhand der Modelle an. Dabei soll deutlich werden, dass die Modelle beliebig gedreht werden können und somit die jeweils günstigste Fläche als Grundfläche dienen kann (evtl. Hausaufgabe).

<u>11. - 13. Stunde:</u> Stationenarbeit

Das Veranschaulichen von Termen durch Figuren und das Aufstellen von Termen für die Bestimmung von Kantenlängen, Flächen und Rauminhalten von Figuren können die Schülerinnen und Schüler selbstständig an Stationen erschließen. Wir haben dazu das Material für 6 Stationen erstellt, bei denen alle in dem Baustein vorgesehenen Qualifikationen auftreten. Die Klasse sollte bei 30 Schülerinnen und Schülern in 10 Gruppen aufgeteilt werden. Jede Station müsste daher doppelt bestückt sein. Ziel ist es, dass jede Gruppe innerhalb von 3 Stunden durch 6 unterschiedliche Stationen wandert und die geforderten Aufgabenlösungen in einem Ergebnisblatt dokumentiert. Die Reihenfolge ist beliebig. Im Anhang finden Sie das Material für die einzelnen Stationen und die Arbeitsaufträge für die Schülerinnen und Schüler. Falls das Programm Binomi in der Schule vorhanden ist, könnte für schnelle Schülerinnen und Schüler mithilfe von Laptops eine zusätzliche, siebte Station eingerichtet werden (Material siehe Anlage 4).

<u>14. Stunde</u>

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Terme aus einem neuen Blickwinkel - dem Umgang mit den neuen Technologien - kennenlernen. Sie sollen die Termumformungen zunächst kontextfrei behandeln und die Äquivalenz dann geometrisch interpretieren.

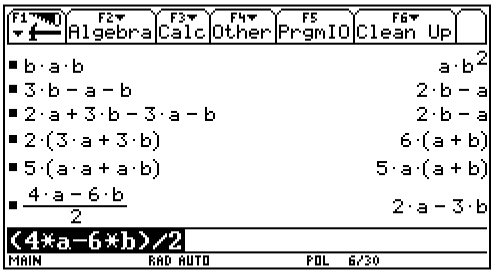
Für Lerngruppen mit eingeführtem CAS-Rechnern sind entsprechend gekennzeichnete Teilaufgaben beigefügt.

In dieser Stunde werden die in den vorangegangenen Stunden eingeführten Rechengesetze wieder aufgegriffen und anhand komplexerer Terme thematisiert.

<u>Aufgabe 1</u>: Der Rechner formt um - ungefragt!

[Der folgende „Screenshot“ des CAS-Rechners kann in CAS-Lerngruppen durch die Schülerinnen und Schüler selbst erstellt werden. Es ist auch möglich, dass diese Abbildung von der Lehrkraft am Projektionsgerät gezeigt wird. Des Weiteren kann ein entsprechendes Arbeitsblatt bereitgestellt werden (siehe Anlage 5)].

1.1 Ein Computeralgebrasystem kann mit Variablen/Platzhaltern/Parametern rechnen. Es müssen nicht immer Zahlenwerte sein. Im folgenden Bild siehst du links, was eingegeben wurde. Rechts steht das, was der Rechner „als Ergebnis" ausgibt.



(a) Vergleiche jeweils die Eingabe mit der Ausgabe und beschreibe die Unterschiede.

(b) *[Erweiterung für CAS]* Gib selbst einige frei gewählte Terme ein und vergleiche deine Eingabe mit der Ausgabe.

1.2 Formuliere einige Prinzipien, nach denen der Rechner die Umformungen vorgenommen hat.

[Als „Prinzipien" können genannt werden: alphanumerische Ordnung wird hergestellt, Potenzen (in einem Produkt) und gleichartige Terme (in einer Summe) werden zusammengefasst, Kommutativgesetz wird angewendet. Wenn die Gesetze nicht explizit erwähnt werden, sollten sie im Unterrichtsgespräch thematisiert werden, z. B. indem für jede Umformung die angewendeten Gesetze benannt werden. Möglich ist auch, die Umformungen in einem Venn-Diagramm (mit Schnittmengen) den angewendeten Rechengesetzen zuzuordnen.]

<u>Aufgabe 2:</u> Geometrische Überprüfung

Wir haben soeben überlegt, dass die ungefragten Termumformungen durch den Rechner mit Rechengesetzen begründet werden können. Dann muss man auch geometrisch begründen können:

2.1 Wie die Abbildung oben zeigt, gibt der Rechner die beiden Terme $2\cdot(3\cdot a+3\cdot b)$ und $6\cdot(a+b)$ als äquivalent aus. Gib für beide Terme je eine geometrische Figur an und begründe an ihnen die Äquivalenz.

2.2 [Mögliche Hausaufgabe - die CAS-Lerngruppen können äquivalente Termpaare selbst erstellen] Suche aus der Abbildung zwei weitere Beispiele heraus und verfahre mit ihnen ebenso.

15. Stunde

Die Ausgabe bei Termumformungen durch den CAS-Rechner liefert bei unterschiedlichen Typen andere Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler sollen zu einem kritischen Umgang mit den gelieferten Ergebnissen hingeführt werden und diese sachgerecht diskutieren können. Sie lernen den factor- und den expand-Befehl kennen.
Die Stunde beginnt mit der tabellarischen Überprüfung von Termäquivalenzen und ergänzt damit die geometrische Überprüfung aus den vergangenen Stunden.

Aufgabe 3: Tabellarische Überprüfung

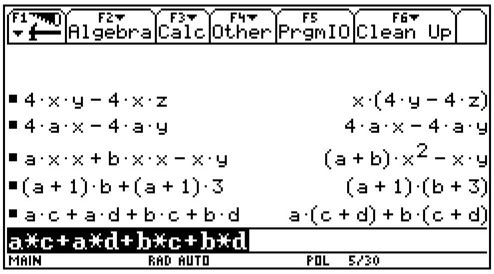
a	b	$-4 \cdot a + 3 \cdot b + 1$	$2 \cdot b - a$	$2 \cdot a - 3 \cdot b - 3 \cdot a - b$
1	2	3	3	
0	-1			
0,3				
	999			

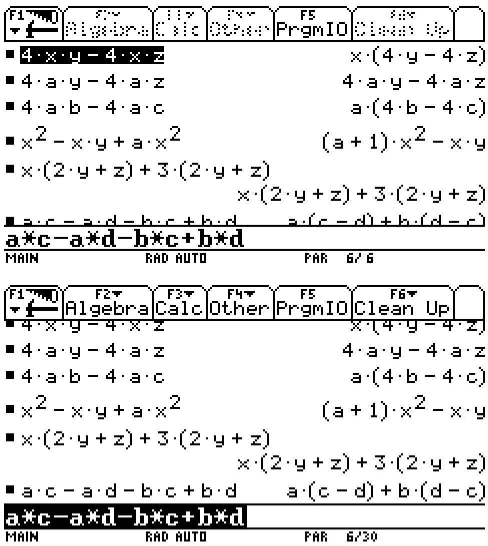
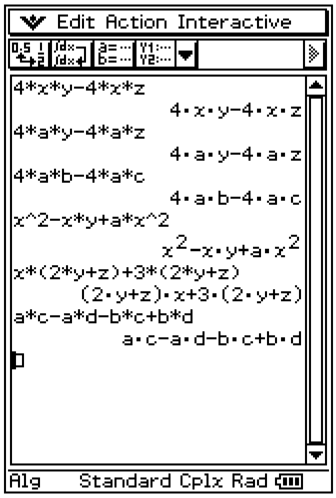
3.1 Überprüfe tabellarisch, ob die Terme äquivalent sind.

3.2 [Hausaufgabe] Überprüfe ebenfalls die Äquivalenz der Terme in der folgenden Tabelle:

x	y	$(x + 2 \cdot y)^2$	$x \cdot (x - y)^2$	$y^3 - (y - 3 \cdot x)$	$2 \cdot x - x \cdot y^2$
2	3				
4	-2				

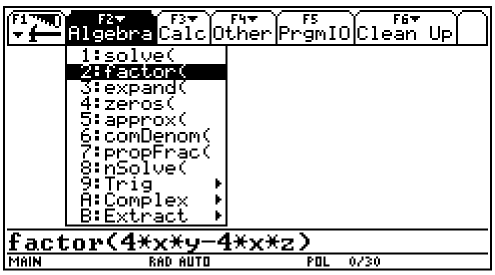
Aufgabe 4: Der Rechner braucht weitere Instruktionen



<table>
<tr><td>TI</td><td>CASIO: keine Veränderung; damit entfällt diese Teilaufgabe</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

4.1 Vergleiche Eingabe und Ausgabe. Würdest du anders vorgehen?

4.2 *[Nur für CAS]* Gib den ersten Term unter Verwendung des Befehls factor ein (siehe folgende Abbildung). Was bewirkt dieser Befehl?



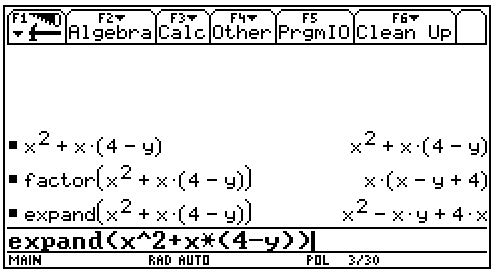
4.3 *[Nur für CAS]* Bearbeite die Terme mit factor und expand (suche selbst) und vergleiche die Wirkung von factor und expand.

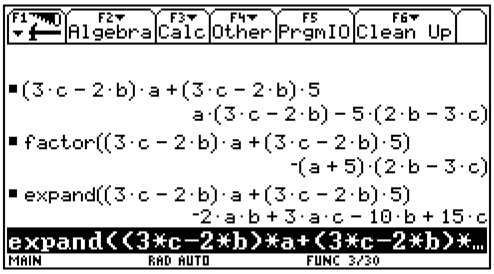
a) $x^2 + x \cdot (4 - y)$

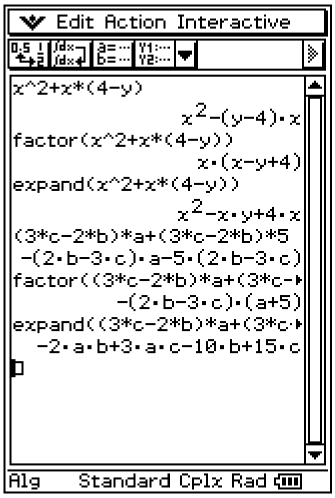
b) $(3 \cdot c - 2 \cdot b) \cdot 5 + (3 \cdot c - 2 \cdot b) \cdot a$

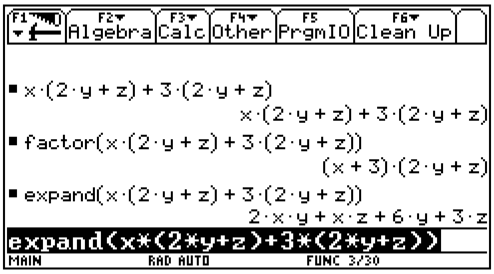
c) $x \cdot (a + b) + (-a - b) \cdot 5$

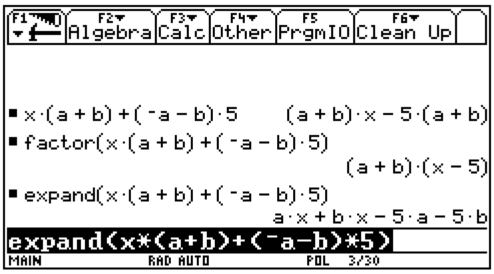
[Lösungshinweise:]

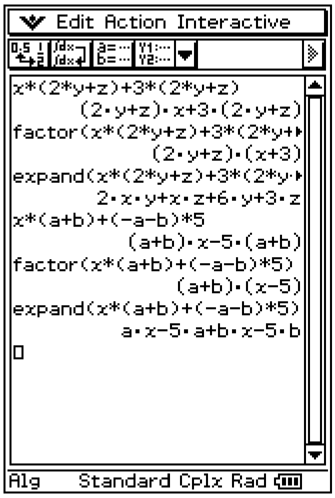












<u>16. Stunde:</u> Ausmultiplizieren von Summen

Die Schülerinnen und Schüler sollen Summen händisch ausmultiplizieren. Sollte kein CAS-Rechner eingeführt sein, kann die Lehrkraft traditionell die Vorgehensweise einführen. Hilfreich für eine prozesshafte Einführung ist die geometrische Visualisierung, die ein entdeckendes Lernen ermöglicht. Der CAS-Rechner bietet den Schülerinnen und Schülern, die Multiplikation von Summen mithilfe des expand-Befehls zu entdecken. Die Ausgaben des Rechners sollen interpretiert und formuliert werden. Übungen können anhand von Lehrbuchaufgaben durchgeführt werden.

<u>Aufgabe 5:</u>

5.1 *[Nur für CAS]* Forme mithilfe des expand-Befehls um.

a) $(a+c)\cdot(d+f)$

b) $(x+2)\cdot(y-3)$

c) $(x^2+3)\cdot(d-x)$

d) $(2\cdot a-b)\cdot(2\cdot b+a^2)$

Vergleiche Ein- und Ausgabe und formuliere deine Beobachtungen in eigenen Worten.

5.2 Kannst du deine Beobachtungen mit der folgenden Grafik zusammenfassen?

$$(\quad+\quad)\quad(\quad+\quad)=$$

Formuliere eine Regel für das Multiplizieren von Summen.

5.3 Ergänze die Lücken und überprüfe deine Ergebnisse anschließend mit dem Rechner.

$(\quad+1)\cdot(y+2)=a\cdot y+\quad+2\cdot a+2$

$(x^2-1)\cdot(y+\quad)=x^2\cdot y-y+\quad-3$

$(x+3)\cdot(x-\quad)=x^2+x-6$

17. Stunde

Im Geometrieteil dieser Einheit lernten die Schülerinnen und Schüler die binomischen Formeln kennen. Die Formeln sollen in dieser Stunde wiedererkannt und algebraisch begründet werden. Für eine Vertiefung können erneut geometrische Sachverhalte herangezogen werden. Zusätzliche Übungsaufgaben können dem Lehrbuch entnommen werden.

Aufgabe 6:

6.1 Ordne äquivalente Terme einander zu. Die richtigen Lösungen ergeben ein Wort.

$9 \cdot x^2 - y^2 =$	
$9 - 12 \cdot x + 4 \cdot x^2 =$	
$9 \cdot x^2 + 12 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 =$	
$9 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + y^2 =$	
$9 - 24 \cdot x + 16 \cdot x^2 =$	

$(-3 + 4 \cdot x)^2$ K $(x + y) \cdot (x - y)$ N

$(3 - 2 \cdot x)^2$ U $(3 \cdot x + y)^2$ I $(3 \cdot x - y)^2$ T $x^2 - y^2$ O $(3 \cdot x + 2 \cdot y)^2$ S

$(3 \cdot x - y) \cdot (3 \cdot x + y)$ M $(2 \cdot x + 3 \cdot y)^2$ E $(x - 3 \cdot y)^2$ G

6.2 Wähle aus deinen Zuordnungen ein Beispiel aus und gib dafür eine geometrische Deutung an.

6.3 Benenne die drei Regeln.

6.4 Begründe die Regeln mithilfe der bekannten Rechengesetze.

Aufgabe 7:

7.1 Schreibe als Produkt.

(a) $4 \cdot a^2 - 9 \cdot b^2$ (c) $4 \cdot i^2 - 25$

(b) $4 \cdot a^2 - 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2$ (d) $49 \cdot u^2 + 84 \cdot u \cdot v + 36 \cdot v^2$

7.2 Ergänze die Terme so, dass eine binomische Formel entsteht.

(a) $x^2 + 4 \cdot x \cdot y + ...$ (c) $x^2 - 6 \cdot x + ...$

(b) $4 \cdot i^2 + ... + 9 \cdot j^2$ (d) $9 \cdot u^2 + 2 \cdot u \cdot v + ...$

<u>18. Stunde</u>: allgemeine Übungsstunde

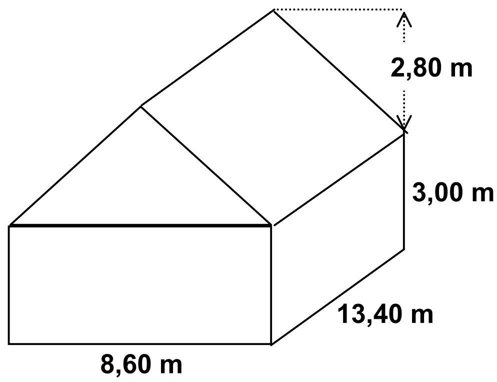
<u>19. Stunde</u>: Klassenarbeit Terme

<u>Aufgabe 1:</u> Intention: Berechnung von konkreten Größen

Das ist das Haus von Müllers.

a) Berechne die Gesamtfläche der senkrechten Hauswände.

b) Berechne die Größe des umbauten Raums (Gesamtvolumen)



<u>Aufgabe 2</u>: Intention: Terme geometrisch interpretieren

Drei der fünf Terme beschreiben den Flächeninhalt richtig. Entscheide und begründe geometrisch.

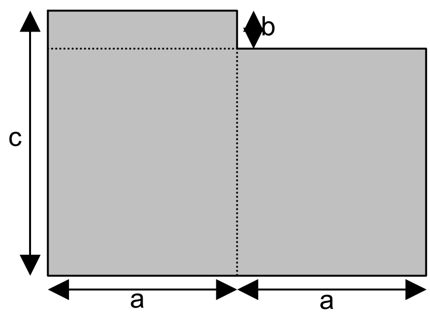
$2 \cdot a \cdot c - a \cdot (c - b)$

$2 \cdot a \cdot (c - b) + a \cdot b$

$a \cdot c + a \cdot (c - b)$

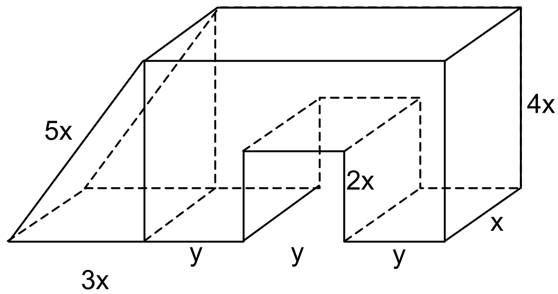
$a \cdot (c - b) + 2 \cdot a \cdot b$

$2 \cdot a \cdot c - a \cdot b$



<u>Aufgabe 3:</u> Intention: Geometrische Sachverhalte durch Terme beschreiben, Prüfung der Äquivalenz durch geometrische Interpretation und durch exemplarisches Einsetzen von Zahlen

Der Künstler Kuno Klotzig ist bekannt für seine klobigen Skulpturen. Für einen Wettbewerb fertigt er einen Entwurf an.



a) Stelle einen möglichst einfachen Term für die Kantenlänge der Skulptur auf.

b) Gegeben sind drei Terme.

$6x^3 + 10x^2y$

$6x^2 + 12x^2y$

$2yx^2 + 12x^3 + 8x^2y$

Prüfe, welche Terme bzw. welcher Term das Volumen der Skulptur beschreibt. Begründe ausführlich.

c) Stelle eine Formel für die Oberfläche dieser Skulptur auf, vereinfache diese und berechne die Oberfläche für x=3 cm und y=3,75 cm.

<u>Aufgabe 4:</u> Intention: kontextfreie Umformungen

a) Löse die Klammern auf und fasse dann soweit wie möglich zusammen.

$5ab - a(2b - a^2) + a^3 =$

$m \cdot (n - 2m) + m \cdot (2n - m) =$

$(x + 2y)\,(3y - 4x)$

Wo steckt der Fehler? $(5x + 6y)^2 = 25x^2 + 36y^2$

b) Klammere aus, so dass der Term in der Klammer möglichst einfach wird.

$24u^2 - 18uv - 9u =$

Umformulierung bei CAS-Existenz:

a) Du siehst drei Umformungen des CAS-Rechners; forme den ersten Term von Hand so um, dass sich der zweite Term ergibt.

1)	$5 \cdot a \cdot b - a \cdot (2 \cdot b - a^2) + a^3 \quad a \cdot (2 \cdot a^2 + 3 \cdot b)$ MAIN RAD AUTO PAR 1/30
2)	expand($m \cdot (n - 2 \cdot m) + m \cdot (2 \cdot n - m)$) $3 \cdot m \cdot n - 3 \cdot m^2$ MAIN RAD AUTO PAR 1/30
3)	expand($(x + 2 \cdot y) \cdot (3 \cdot y - 4 \cdot x)$) $-4 \cdot x^2 - 5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y^2$ MAIN RAD AUTO PAR 1/30

Die nächste Gleichung ist falsch:

4)	$(5x+6y)^2 = 25x^2 + 36y^2$

Wo steckt der Fehler?

b) Klammere aus, so dass der Term in der Klammer möglichst einfach wird. Alle Umformungsschritte sind aufzuschreiben und zu begründen.

$24u^2 - 18uv - 9u =$

<u>20. Stunde</u>: *Rückgabe/Besprechung der Arbeit*

<u>Lösungshinweise:</u>

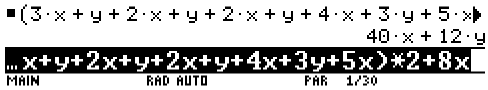
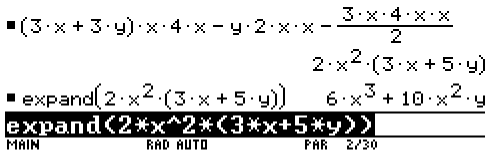
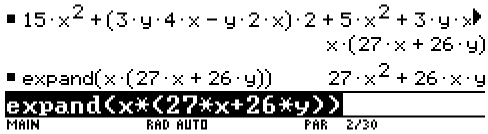
Zu 1:

Zu 2:

Argumentation mit Flächen; Schraffierung entsprechender Flächen - damit:

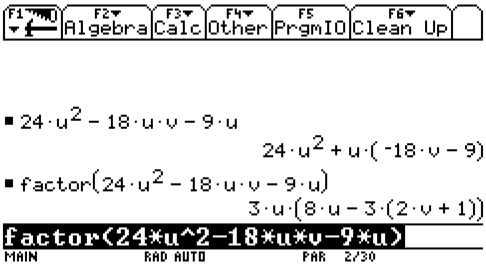
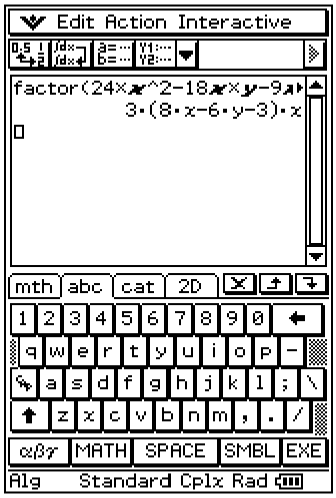
erste falsch; zweite richtig, da….; dritte richtig, da….; vierte falsch; fünfte richtig, da…

Zu 3:

<table>
<tr><td>a) Aufstellen des Terms, Umformen mit oder ohne CAS</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b) begründete Auswahl: geometrische Interpretation von $6x^3$ und $10x^2y$ oder Aufstellen eines Terms und Umformen zu $6x^3+10x^2y$; der zweite Term scheidet aufgrund der falschen Dimension aus</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
</td></tr>
</table>

Zu 4:

Bei b) hilft CAS nicht unbedingt:

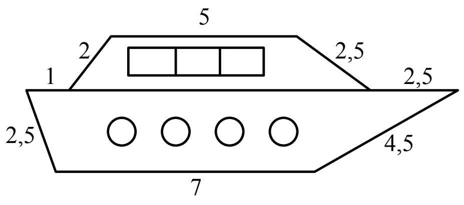
<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2.2.3 Anlagen

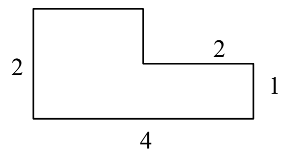
Anlage 1: Übungsblatt

1. Bestimme den Umfang der folgenden Figuren:

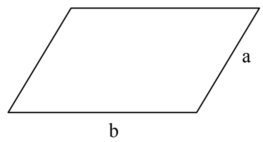
a)



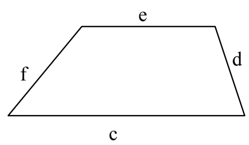
b)



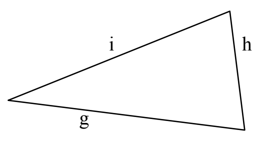
2. Gib die Umfangsformeln für die folgenden Figuren in möglichst einfachen Termen an:



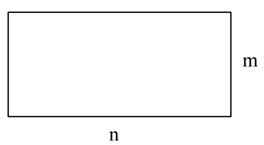
up (____________________) = ____



ut (____________________) = ____



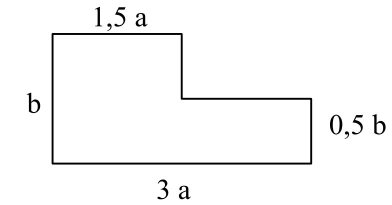
ud (____________________) = ____



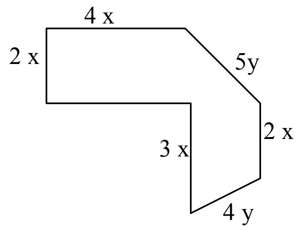
ur (____________________) = ____

3.1 Gib die Umfangsformeln für die folgenden Figuren in möglichst einfachen Termen an:

a)



b)



3.2 Berechne die Umfänge für folgende Variabelenwerte:

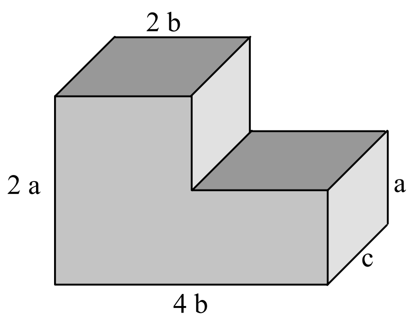
a = 2 cm (5 dm; 7,3 m)　　b = 3 cm (4 dm; 5,8 m)

x = 6 km (11 m; 17,2 mm)　　y = 4 km (23 m; 15,9 mm)

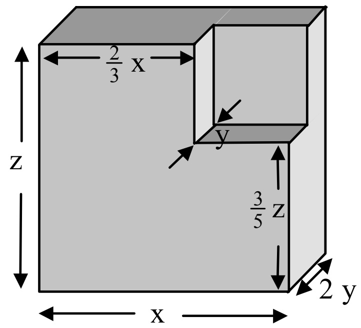
3.3 Bestimme für die Figuren aus 3.1 den Umfang für die doppelte (3-fache, 4-fache, halbe) Seitenlänge b bzw. x .

4.1 Gib für die Kantenlänge der Körper jeweils einen möglichst einfachen Term an.

a)



b)



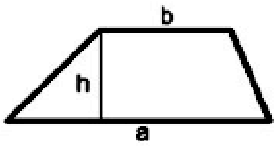
4.2 Gib für den Oberflächeninhalt der Körper jeweils einen möglichst einfachen Term an.

Anlage 2: Aufgabe zum Trapez

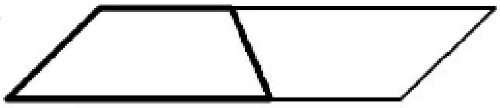
Überlegt euch möglichst viele verschiedene Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Trapezen. Erinnert euch an die bekannten Strategien: Ihr könnt ergänzen, zerlegen, verschieben ...

<u>Lösung</u>

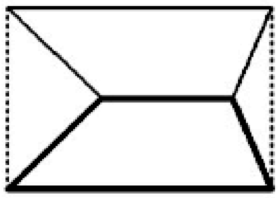
Eine kleine Lösungsauswahl:



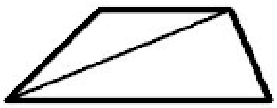
(i)



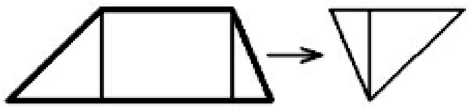
(ii)



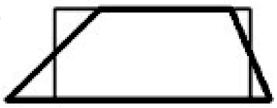
(iii)



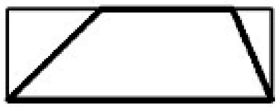
(iv)



(v)

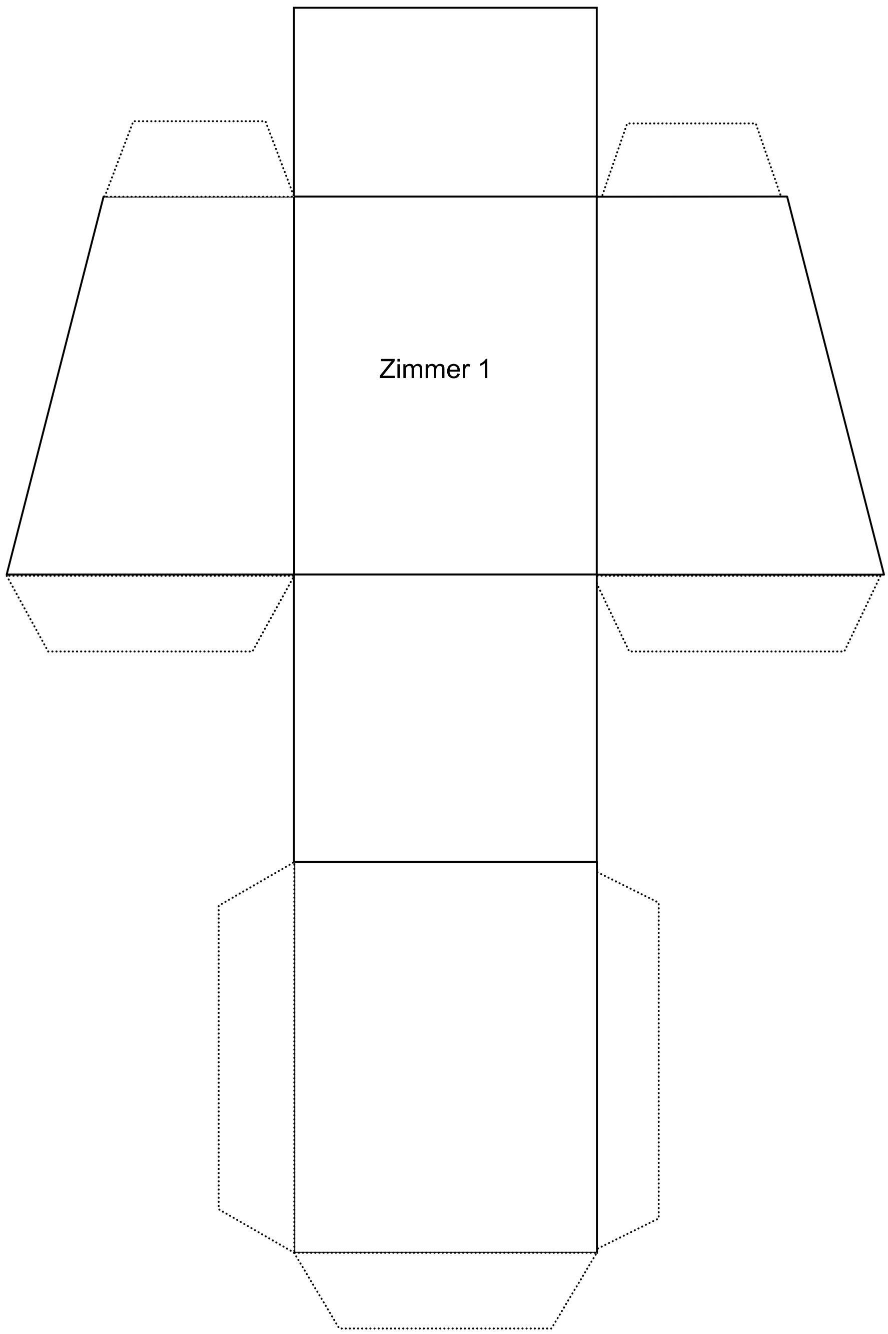


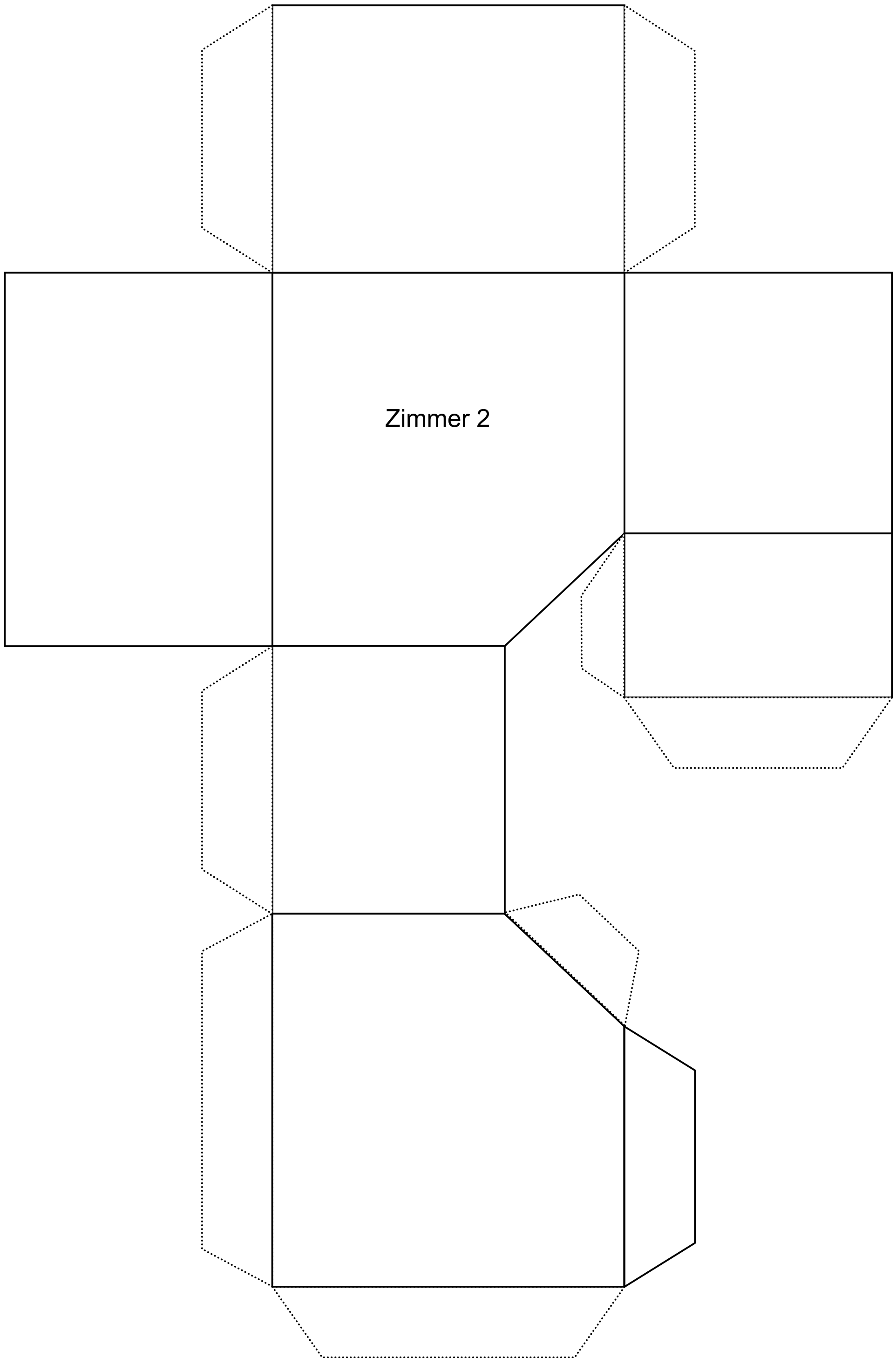
(vi)

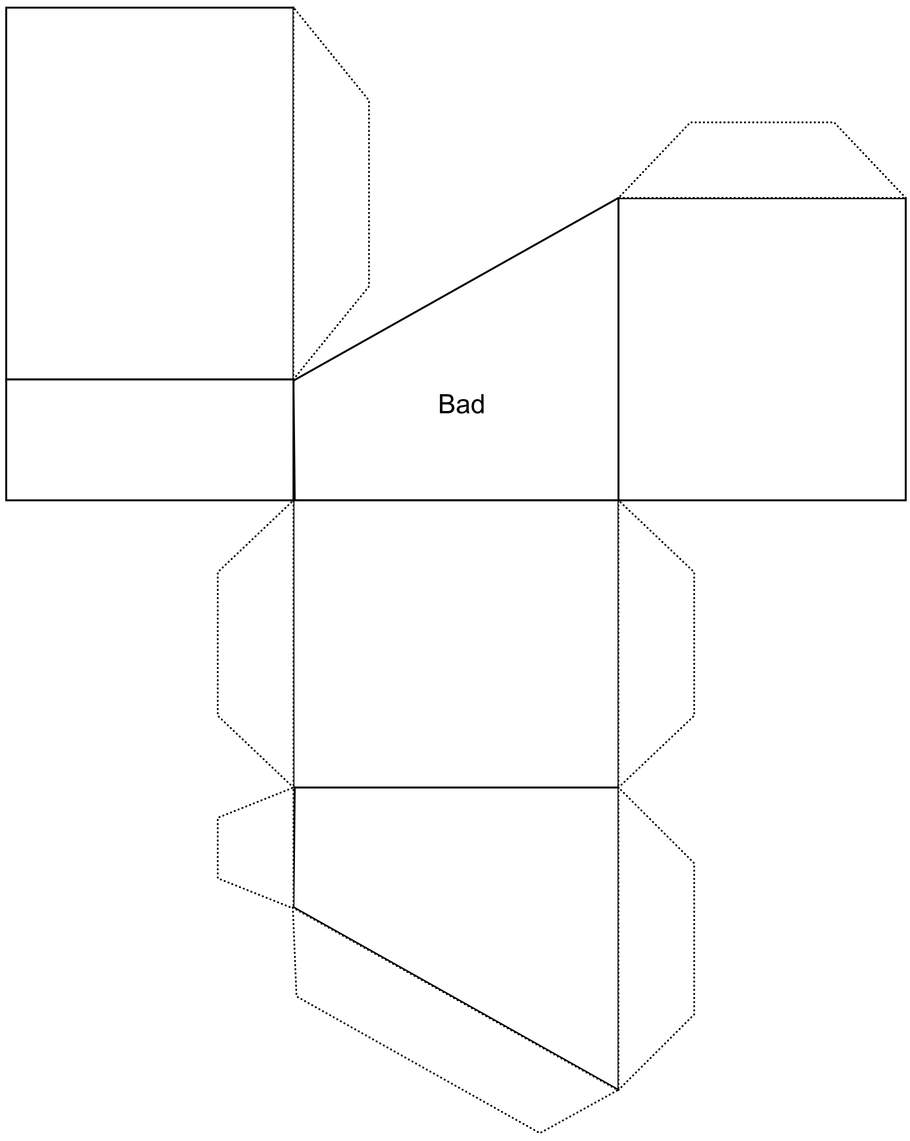


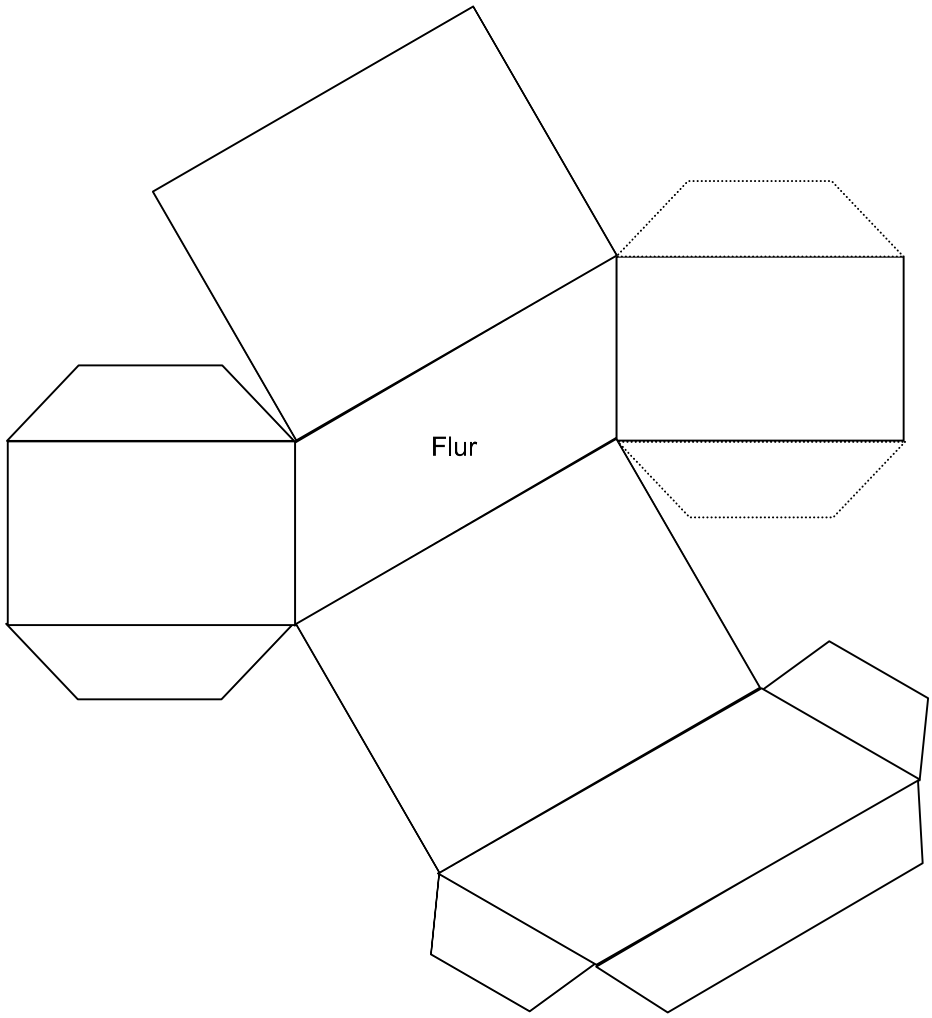
(i)	Ergänzung zum Parallelogramm	$A_T(a,b,h) = \frac{(a+b)}{2}h$
(ii)	Ergänzung zum Rechteck	$A_T(a,b,h) = \frac{a \cdot 2h - \frac{(a-b)\cdot 2h}{2}}{2}$
(iii)	Zerlegung in zwei Dreiecke	$A_T(a,b,h) = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}$
(iv)	Zerlegung in Rechteck und Dreieck	$A_T(a,b,h) = bh + \frac{(a-b)h}{2}$
(v)	Mittelwertbildung	$A_T(a,b,h) = \frac{a+b}{2}h$
(vi)	Ergänzung zum Rechteck	$A_T(a,b,h) = ah - \frac{(a-b)h}{2}$

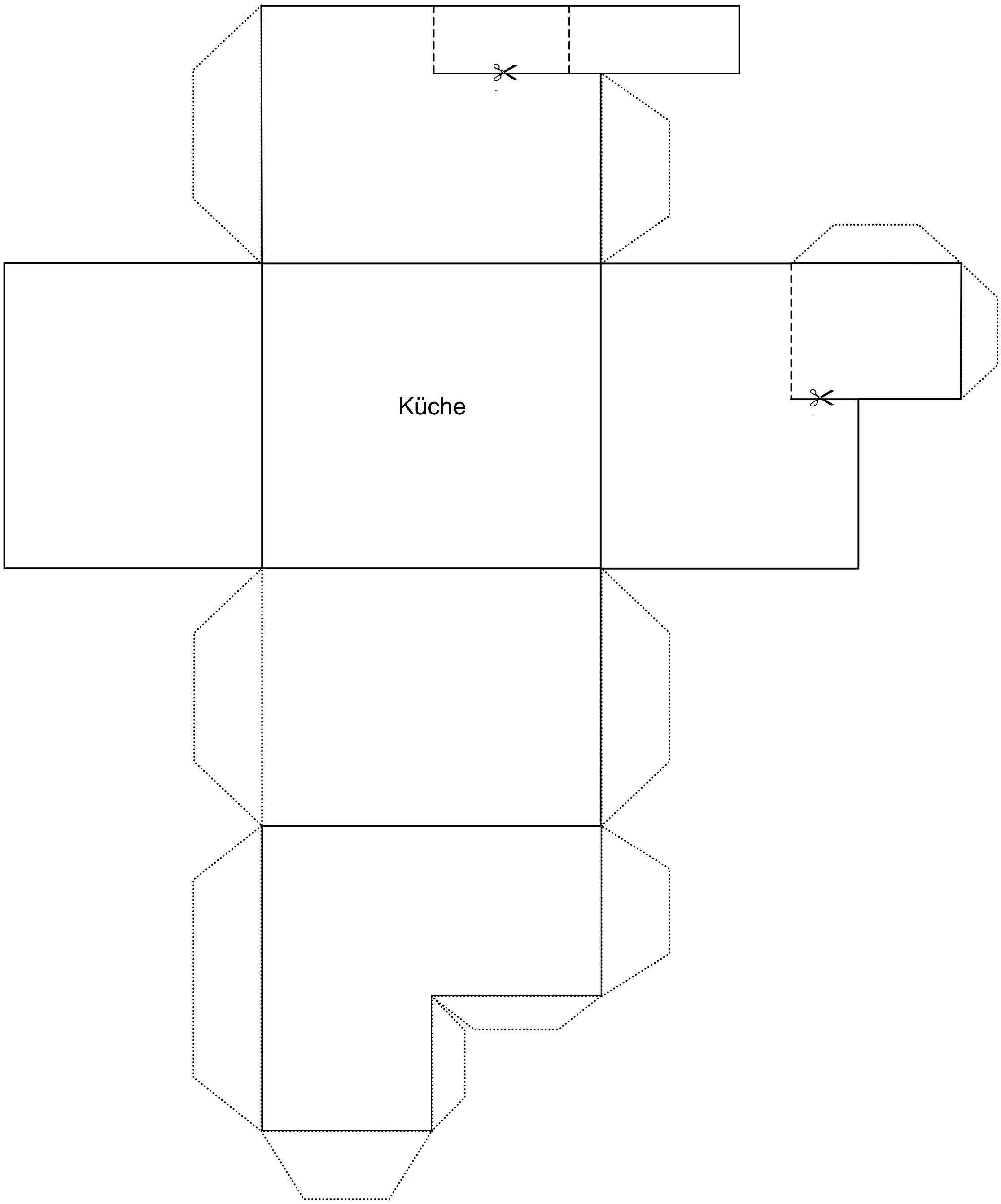
Anlage 3: Bastelbögen




Zimmer 2

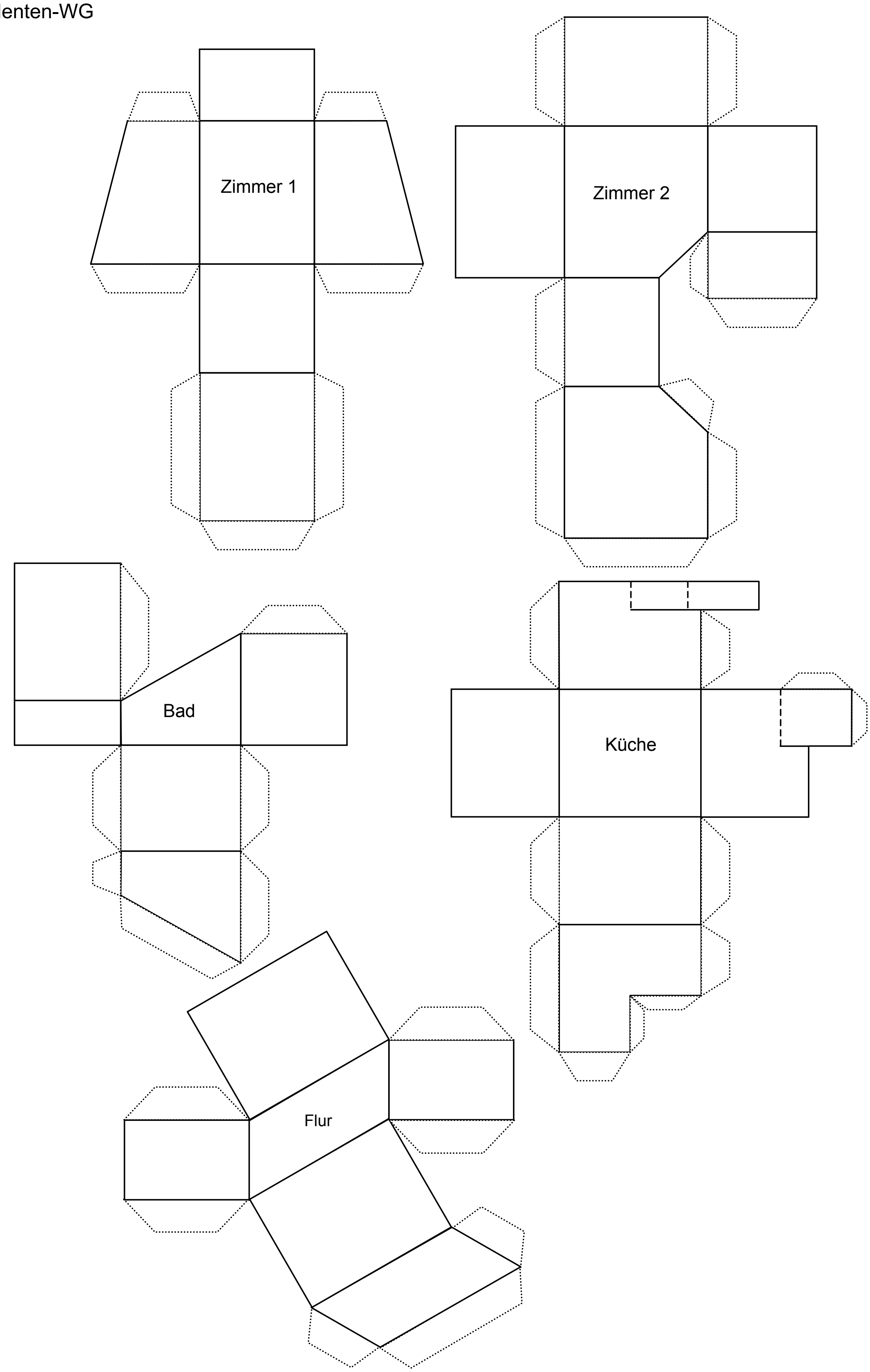

Bad


Flur



(Die Linien mit dem Scherensymbol einschneiden.)

Studenten-WG



Anlage 4: Material für Stationenlernen

Ergebnisblatt

Station 1

Arbeitsauftrag 1: Schnurlänge: S(b,h,l) =

Arbeitsauftrag 2: Schnurlänge: S(b,h,l) =

Arbeitsauftrag 3:

Paket 1	Paket 2

Arbeitsauftrag 4:

Paket	Term

Station 2

Figur	A	B	C	D	E	F	G	H
Term								

Station 4

Arbeitsauftrag 1: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 =$

Arbeitsauftrag 2:

Lage der Puzzleteile	Beschreibung der Vorgehensweise

Arbeitsauftrag 3:

Informative Zeichnung	Begründung

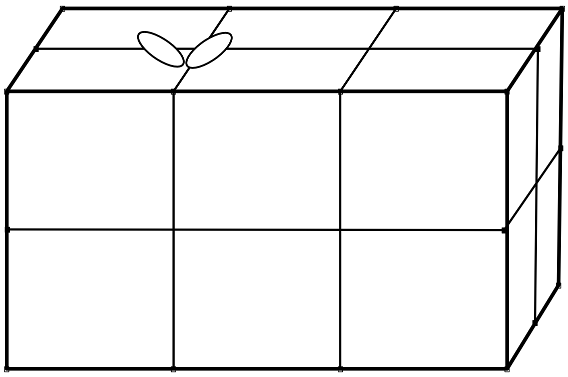
Station 5

Körper 1	Körper 2
Körper 3	Körper 4
Körper 5	Körper 6

Station 6

b	h	t	Term 1	Term 2
1	4	3		
1.8	2,79	0,02		
10130	$\frac{1}{7}$	0		

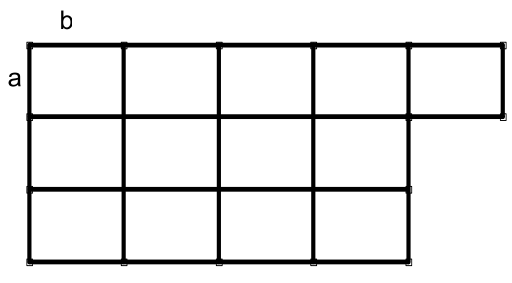
Station 1, Karte 1	
Arbeitsauftrag 1: Gib die Schnurlänge für Pakete mit der abgebildeten Schnürung in Abhängigkeit von Länge l, Breite b und Höhe h an. Für die Schleife wird eine Schnurlänge von 60 cm gerechnet. Notiere den Term auf dem Ergebnisblatt.	

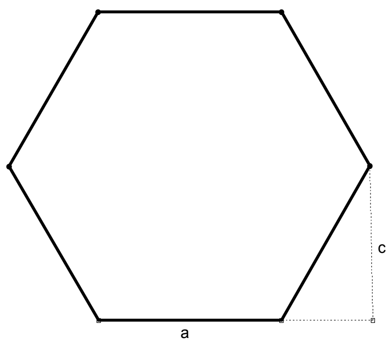
Station 1, Karte 2	
Arbeitsauftrag 2: Gib die Schnurlänge für Pakete mit der abgebildeten Schnürung in Abhängigkeit von Länge, Breite und Höhe an. Für die Schleife wird jeweils eine Schnurlänge von 20 cm gerechnet.	

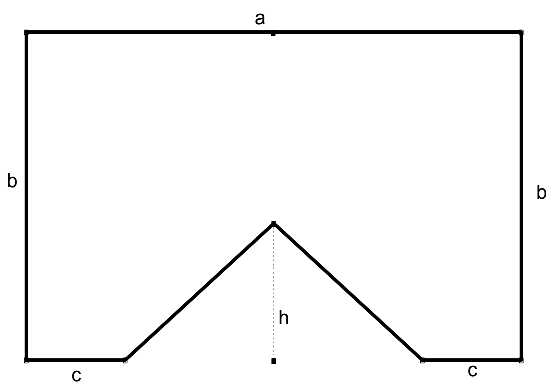
Station 1, Karte 3
Arbeitsauftrag 3: Zeichne eine Paketschnürung zu den Termen auf dem Ergebnisblatt: a) $2l+4b+2h+10$ b) $4l+4b+4h+15$

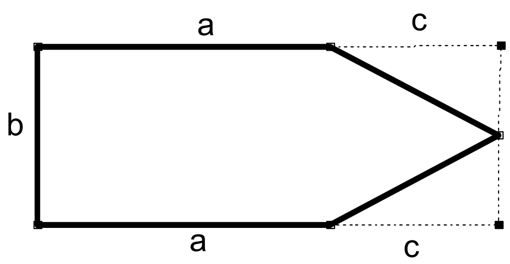
Station 1, Karte 4
<u>Arbeitsauftrag 4:</u> Erfinde selbst eine Schnürung für ein Paket. a) Zeichne eine informative Skizze. b) Gib einen Term für die Schnurlänge an

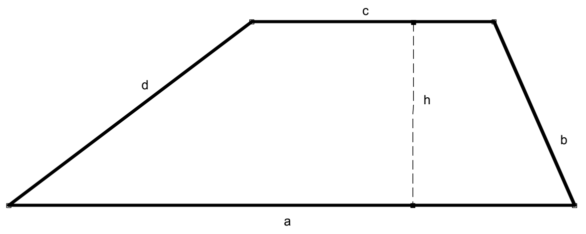
Station 2
<u>Arbeitsauftrag:</u> Ihr seht zwei Arten von Karten. Es gibt Karten mit Termen, die von 1 bis 8 nummeriert sind, und Karten mit Flächenfiguren, die mit A bis H bezeichnet werden. Wählt jeweils eine Flächenkarte aus und ordnet ihr, wenn möglich, eine Termkarte zu. Notiert die Zuordnung in der vorgesehenen Tabelle eures Ergebnisblattes.

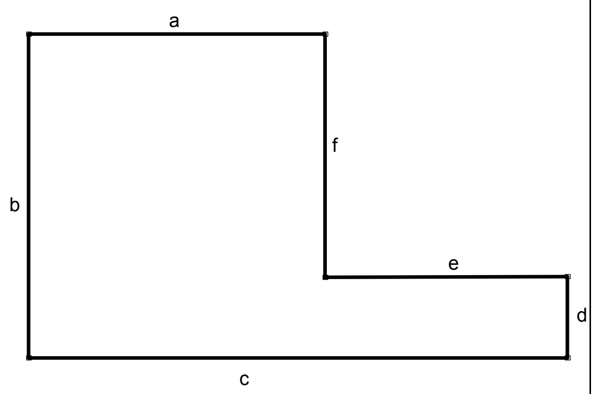
Station 2, Karte A	**Station 2, Karte 5**
	$13 \cdot a \cdot b$

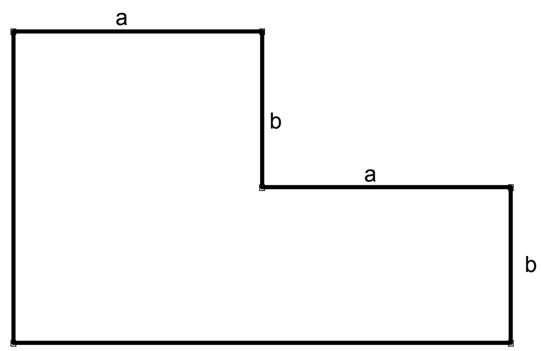
<table>
<tr><th>Station 2, Karte B</th><th>Station 2, Karte 8</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$6\cdot\frac{a\cdot c}{2}$$</td></tr>
</table>

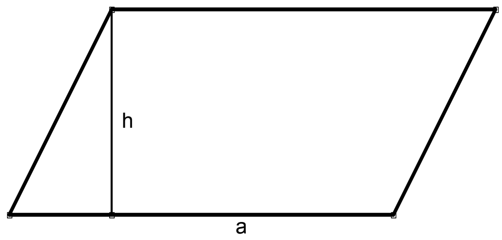
<table>
<tr><th>Station 2, Karte C</th><th>Station 2, Karte 1</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$a\cdot b-\frac{(a-2c)\cdot h}{2}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Station 2, Karte D</th><th>Station 2, Karte 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$(a+c)\cdot b-\frac{c\cdot b}{2}$$</td></tr>
</table>

Station 2, Karte E	**Station 2, Karte 4**
	$\frac{a \cdot h}{2} + \frac{c \cdot h}{2}$

Station 2, Karte F	**Station 2, Karte 7**
	$a \cdot b + (c - a) \cdot d$

Station 2, Karte G	**Station 2, Karte 3**
	$2 \cdot a \cdot 2 \cdot b - a \cdot b$

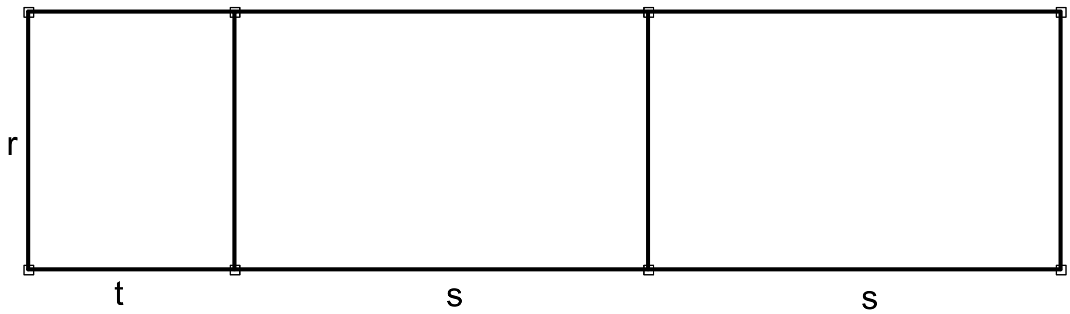
Station 2, Karte H	**Station 2, Karte 6**
	$h \cdot a$

Station 3

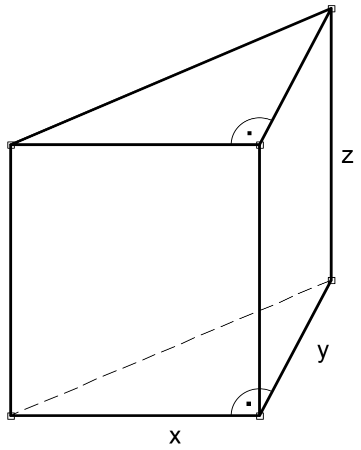
<u>Arbeitsauftrag:</u>

Jeder von euch nimmt verdeckt zwei Karten und beschreibt den Flächeninhalt oder bei Körpern das Volumen der Figur durch je einen Term. Schülerin/Schüler 1 zeigt den anderen ihren/seinen ersten Term. Diese zeichnen eine dazu passende Figur. Anschließend wird die Karte aufgedeckt und verglichen. Dies wird für die anderen Karten entsprechend wiederholt.

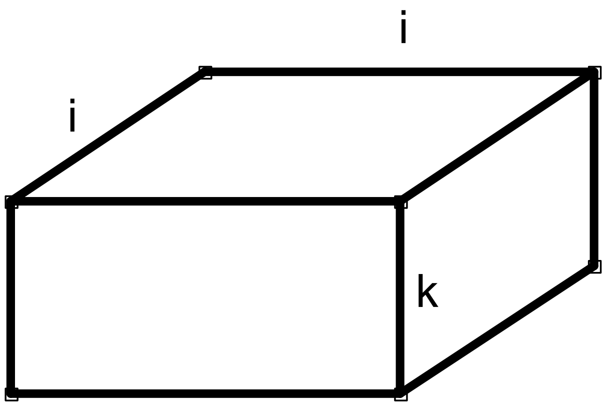
Station 3, Karte 1



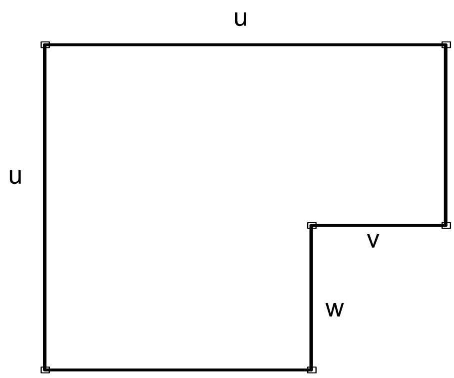
Station 3, Karte 2

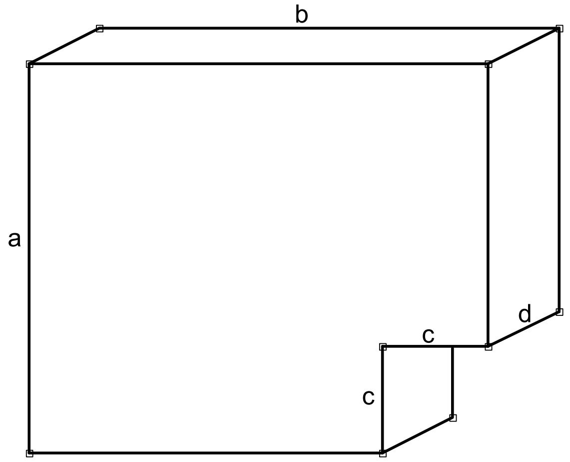


Station 3, Karte 3



Station 3, Karte 4



Station 3, Karte 5


Station 4

Arbeitsauftrag 1:

Die vier Puzzleteile haben insgesamt einen Flächeninhalt von $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. Lege die Puzzleteile zu einem Quadrat zusammen und beschreibe den Flächeninhalt dieses Quadrats auf dem Ergebnisblatt durch einen Term.

Die Formel, die du erhältst, heißt „1. Binomische Formel“.

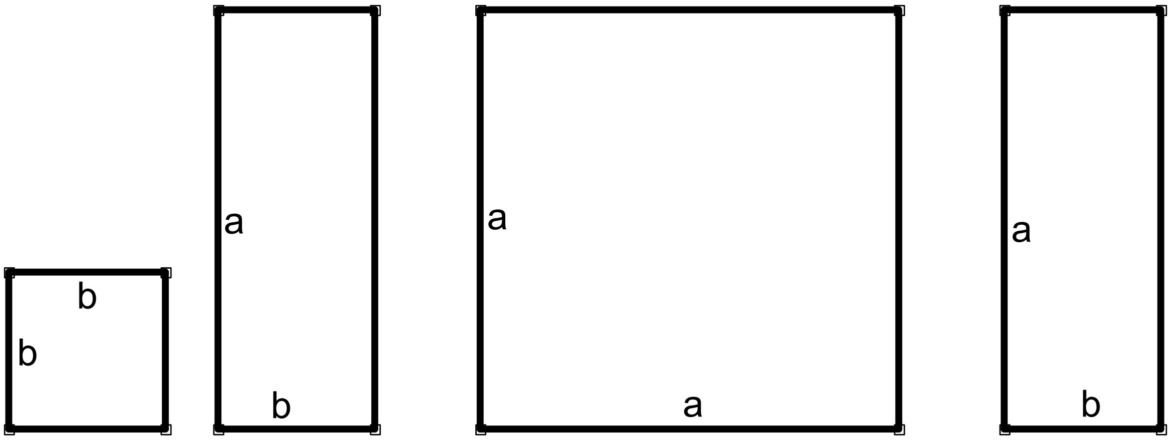
Station 4

Arbeitsauftrag 2:

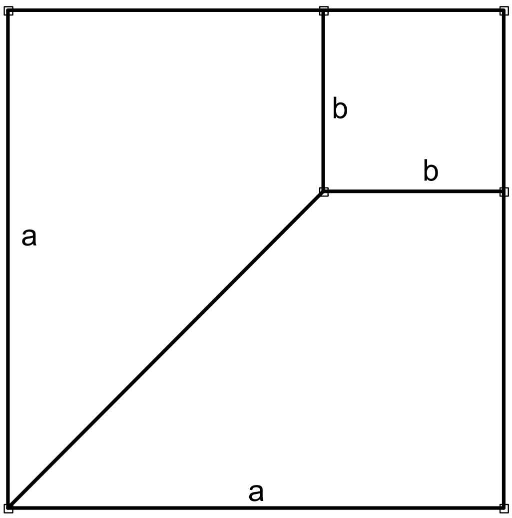
Eine weitere binomische Formel heißt:

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ (2. Binomische Formel)

Wie könnt ihr die Puzzleteile legen, um diese Formel zu begründen? Beschreibt eure Vorgehensweise und skizziert die Lage der Puzzleteile auf eurem Ergebnisblatt.



Station 4
<u>Arbeitsauftrag 3:</u> Lege die drei Puzzleteile zu einem Quadrat zusammen und notiere einen möglichst einfachen Term für den Flächeninhalt auf deinem Ergebnisblatt. Nimm dann das kleine Quadrat mit Inhalt b^2 weg und zeige durch ein verändertes Zusammenlegen der übrigen 2 Puzzleteile die Gültigkeit der Formel $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$. Erstelle eine informative Zeichnung und begründe auf deinem Ergebnisblatt.



Station 5

Das Volumen eines Quaders kann mit der Formel $V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$ bestimmt werden. Ein Quader hat ein Volumen von 90 cm^3. Seine Kantenlängen könnten also 3 cm, 5 cm und 6 cm sein. Eure Aufgabe besteht darin, fünf <u>möglichst unterschiedliche</u> Körper zu finden, deren Volumen ebenfalls 90 cm^3 beträgt. Zeichnet dazu jeweils eine informative Figur und begründet, dass das Körpervolumen immer gleich groß ist.

Station 6

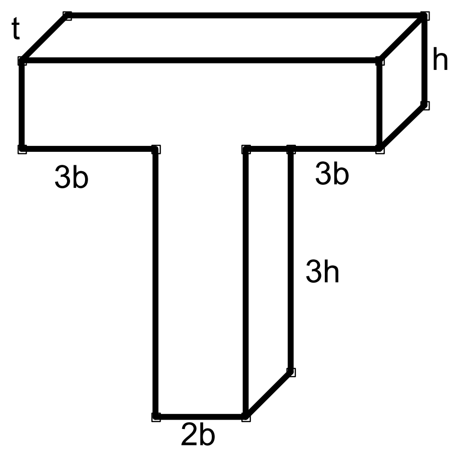
Stellt zu dem Körper, den ihr auf der Karte seht, zwei unterschiedliche Terme auf, mit denen das Volumen des Körpers berechnet werden kann.

Fülle die Tabelle auf deinem Ergebnisblatt aus und überprüfe damit die Äquivalenz.

Berechne auch die Kantenlänge und die Oberfläche.

Kontrolle: Wenn du in deinen Term b = 2, h = 3 und t = 5 einsetzt, muss die Kantenlänge zu 142 LE und die Oberfläche zu 448 VE zu addieren sein.

Station 6



Anlage 5

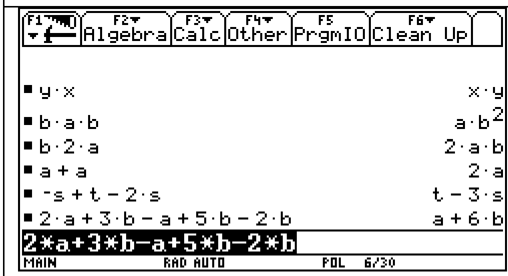
Aufgabe A:

Tippe die Terme ein und vergleiche mit der Ausgabe. Was hat der Rechner gemacht?

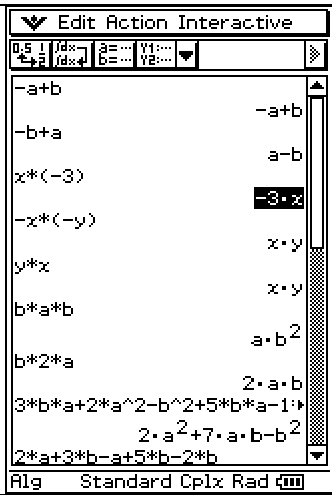
$-b+a$ $x\cdot(-3)$ $-x\cdot(-y)$ $y\cdot x$ $b\cdot a\cdot b$ $b\cdot 2\cdot a$ $3\cdot b\cdot a+2\cdot a^2-b^2+5\cdot b\cdot a-1\cdot a\cdot b$ $2\cdot a+3\cdot b-a+5\cdot b-2\cdot b$ $2+(x+y)$	$a+a$ $4\cdot a\cdot(x\cdot y)$ $-a+b\ b\cdot 3\cdot 4\cdot a$ $2\cdot a\cdot 6\cdot b$ $-a+2\cdot b$ $3\cdot b-a-b$ $b\cdot 10\cdot 3\cdot b$ $a\cdot b\cdot 30\cdot b$ $7\cdot a+b+2\cdot c-2\cdot 2-2\cdot b$

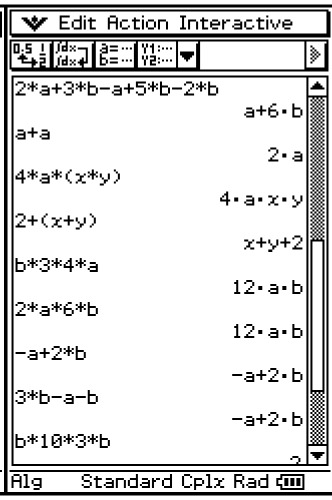
Teillösungen:

TI



CASIO





Aufgabe B:

Gib die Terme in ein Computeralgebrasystem ein. Vergleiche auch hier die Ausgabe mit deiner Eingabe. Beschreibe die Unterschiede.

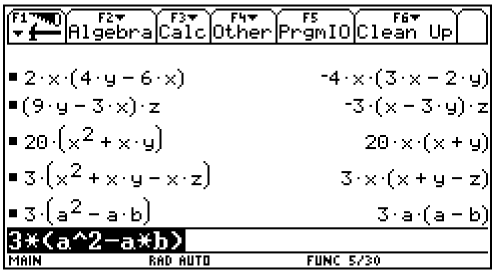
Formuliere wieder einige Prinzipien, nach denen der Rechner die Umformungen vorgenommen hat.

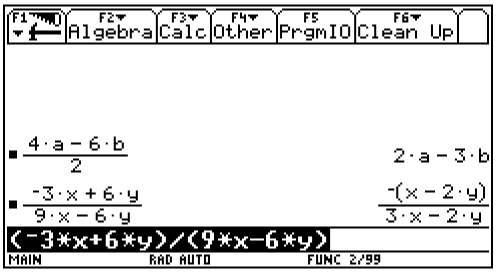
[Rechengesetze aus II sollten genannt bzw. im Unterrichtsgespräch thematisiert werden.]

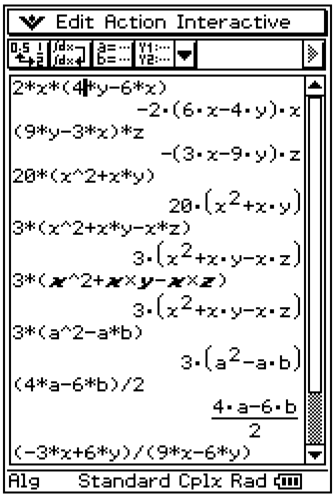
Wähle zwei Rechnerumformungen aus und gib jeweils eine geometrische Begründung an.

$2\cdot x\cdot(4\cdot y-6\cdot x)$ $(9\cdot y-3\cdot x)\cdot z$ $20\cdot(x^2+x\cdot y)$ $3\cdot(x^2+x\cdot y-x\cdot z)$	$3\cdot(a^2-a\cdot b)$ $\dfrac{4\cdot a-6\cdot b}{2}$ $\dfrac{-3\cdot x+6\cdot y}{9\cdot x-6\cdot y}$

Teillösungen:







2.2.4 Kontakt

Markus Eberle	*Eberle.Markus@t-online.de*
Torsten Glaser	*t.glaser@web.de*
Doris Hansen	*luggels@freenet.de*
Werner Hellberg	*w.hellberg@t-online.de*
Sigrun Klöpfer	*SKloepfer@aol.com*
Edmund Kronabel	*ekronabel@onlinehome.de*
Guido Pinkernell	*guido.pinkernell@gmx.de*
Stefan Ruelmann	*StefanRuelmann@aol.com*
Lars Schoppmann	*Lars.Schoppmann@t-online.de*
Karen Schultz	*Karen.Schultz@gmx.de*
Frank-Gerd Ueckert	*ueckert@vr-web.de*
Karsten Völker	*ohgvoelker@web.de*
Renate Voigt	*RenateHertaVoigt@aol.com*